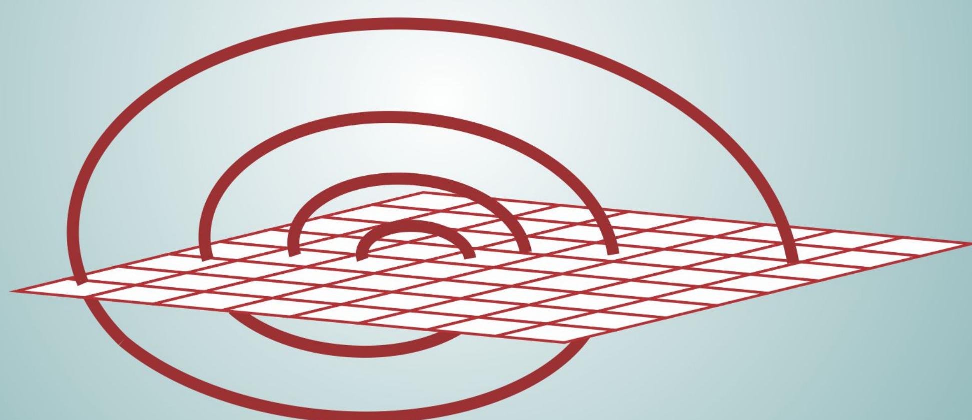
Cálculo de uma Variável

Marivaldo P. Matos



UFPB - CCEN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CÁLCULO DE UMA VARIÁVEL REAL

Marivaldo P. Matos

Sumário

1.1 Propriedades Básicas

Adotaremos as seguintes notações para os conjuntos numéricos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{1,2,3,4,\ldots\} \qquad \text{(conjuntos dos números naturais)}\\
\mathbb{Z} &= \{\ldots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\ldots\} \qquad \text{(conjuntos dos números inteiros)}\\
\mathbb{Q} &= \{p/q, \quad p,q\in\mathbb{Z},\ q\neq 0\} \qquad \text{(conjuntos dos números racionais)}
\end{aligned}$$

No conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, destacamos o subconjunto $\mathbb{Z}_P$ dos números pares (múltiplo de 2) e o subconjunto $\mathbb{Z}_I$ dos números ímpares, isto é:

$$\mathbb{Z}_P = \{2k, \quad k\in\mathbb{Z}\} \quad \text{e} \quad \mathbb{Z}_I = \{2k+1, \quad k\in\mathbb{Z}\}.$$

No Exemplo 1.1.1 a seguir veremos como provar que um determinado número inteiro é par.

EXEMPLO 1.1.1 *Se p é um número par, então o número p^2 também é par. De fato, sendo p um número par, então $p=2k$, para algum inteiro k e, sendo assim:*

$$p^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2\left(2k^2\right).$$

Ora, sendo $2k^2$ um número inteiro, deduzimos que p^2 é um múltiplo inteiro de 2 e, portanto, é um número par. Como consequência, deduzimos que se p^2 é um número par, então p também é par. De fato, se p fosse ímpar, então $p=2k+1$, para algum inteiro k, e, portanto, $p^2=(2k+1)^2=2\left(2k^2+2k\right)+1$ também seria ímpar, contradizendo a hipótese de ser p^2 um número par.

DEFINIÇÃO 1.1.2 *A fração p/q, sendo p e q números inteiros positivos, é dita irredutível quando os números p e q forem primos entre si, isto é, não possuem fator comum diferente de 1. Por exemplo, 2 e 3, 3 e 5 são primos entre si.*

EXEMPLO 1.1.3 *Como provar que o número $p=413$ é um número ímpar? Basta expressar o número p sob a forma $2k+1$, sendo k um número inteiro. Temos:*

$$p = 413 = 2\times 206 + 1 = 2k+1, \quad \textit{com} \quad k = 206.$$

Os números racionais p/q (quociente de dois números inteiros ou frações ordinárias) também se expressam como frações decimais exatas ou dízimas periódicas. Por exemplo:

$$\begin{aligned}\frac{2}{5} &= 0.4 \quad \text{(decimal exata)}.\\ \frac{10}{3} &= 3.33333\ldots \quad \text{(dízima periódica de período 3)}.\end{aligned}$$

Já o número $\pi = 3.14156365\ldots$, que é a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro, nem é decimal exata nem dízima periódica. Ele é classificado como *número irracional.*

EXEMPLO 1.1.4 (o número $\sqrt{2}$) *Este exemplo nos convencerá da necessidade de ampliar o conjunto* $\mathbb{Q}$ *dos números racionais. Representemos por* x *o valor numérico da diagonal de um quadrado de lado* 1*, como ilustrado na Figura* 1.1*.*

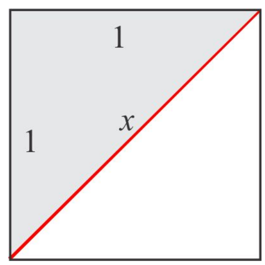


Figura 1.1: O número $\sqrt{2}$.

O Teorema de Pitágoras nos ensina que:

$$\boxed{x^2 = 1^2 + 1^2 = 2} \tag{1.1}$$

e isto sugere definir a raiz quadrada de 2 *e anota-se* $\sqrt{2}$*, como sendo o único número positivo, cujo quadrado é* 2*, o que nos leva a concluir a partir de de* (1.1) *que* $x = \sqrt{2}$*. Como veremos adiante, o número* $\sqrt{2}$ *não pode ser expresso como quociente de dois números inteiros e, portanto,* $\sqrt{2}$ *não é um número racional; outros números irracionais (não racionais) são:* $\sqrt{3}$, π *e* $\sqrt{5}$.

Representaremos por $\mathbb{R}$ o conjunto de todos os números reais (racionais ou não), o qual será nosso conjunto universo. É claro que todo número natural é, também, um número inteiro e neste sentido temos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Além disso, qualquer número inteiro p pode ser visto como um número racional, bastando olhar p sob a forma fracionária, com denominador $q = 1$, isto é:

$$p = \frac{p}{1} \in \mathbb{Q}$$

e temos a seguinte cadeia de inclusões próprias:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

EXEMPLO 1.1.5 (O número $\sqrt{2}$ é irracional) *Uma Demonstração por Absurdo consiste em negar a Tese e chegar a uma contradição da Hipótese. Isso nada mais é do que a equivalência entre as sentenças*

$$\boxed{[P] \Rightarrow [Q]} \quad e \quad \boxed{[\sim Q] \Rightarrow [\sim P]} \tag{1.2}$$

(em (1.2) $\sim Q$ indica a negativa da afirmação Q). Se $\sqrt{2}$ fosse racional, ele se escreveria sob a forma irredutível $\sqrt{2} = p/q$, sendo p e q inteiros e $q \neq 0$, e, consequentemente:

$$\boxed{2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2.} \tag{1.3}$$

De (1.3) resulta que p^2, e portanto p, é um número par. Expressando $p = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, encontramos $2q^2 = 4k^2$ e daí resulta q^2 e, portanto q, é par, contradizendo a irredutibilidade da fração p/q.

▶ **OPERAÇÕES ALGÉBRICAS COM FRAÇÕES** No conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais (frações), temos as seguintes operações:

1. Soma: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}, \quad b \neq 0, \; d \neq 0.$
2. Produto: $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}, \quad b \neq 0, \; d \neq 0.$
3. Quociente: $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}, \quad b \neq 0, \; c \neq 0$ e $d \neq 0.$

1.1.1 Intervalos da Reta $\mathbb{R}$

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais pode ser representado por um eixo orientado, no qual destacamos os diversos tipos de intervalos, que representam subconjuntos especiais da reta real. Sejam a e b, dois números reais, com $a < b$.

(I_1) Intervalo Fechado de extremos a e b:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

(I_2) Intervalo Aberto de extremos a e b:

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

(I_3) Intervalo Semiaberto de extremos a e b:

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

(I_4) Intervalo Semiaberto de extremos a e b:

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

Todos esses intervalos são ditos limitados, por terem comprimento finito; o comprimento de cada um deles é $b - a$. O centro do intervalo de extremos a e b é o ponto médio $x = (a+b)/2$ e o raio é o número real $R = (b-a)/2$.

Além desses intervalos, temos os seguintes intervalos ilimitados, isto é, de comprimento infinito.

(I_5) Intervalo Aberto Ilimitado de extremo superior b:

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

(I_6) Intervalo Fechado Ilimitado de extremo superior b:

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$

(I_7) Intervalo Fechado Ilimitado de extremo inferior a:

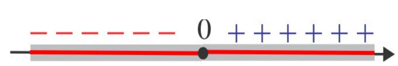
$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

(I_8) Intervalo Aberto Ilimitado de extremo inferior a:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

(I_9) A reta real $\mathbb{R}$ se identifica com o intervalo ilimitado:

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$



EXEMPLO 1.1.6 (operações com intervalos) *Consideremos os intervalos* $I = (1,3]$, $J = [2,4]$ *e* $K = (-3,1]$, *representados em eixos paralelos, como ilustrado na Figura 1.2. Algumas operações entre conjuntos devemos ter em mente*:

(i) *Interseção:* $A \cap B = \{x : x \in A \ e \ x \in B\}$ *(x está no conjunto A e no conjunto B)*

(ii) *União:* $A \cup B = \{x : x \in A \ ou \ x \in B\}$ *(x está no conjunto A ou no conjunto B)*

(iii) *Complementar:* $A \backslash B = \{x : x \in A \ e \ x \notin B\}$ *(x está no conjunto A e não está no conjunto B)*

Por observação da figura, deduzimos que:

(a) $I \cap J = [2,3] = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 3\}$.

(b) $I \cap K = \varnothing$ *(conjunto vazio; não há ponto comum aos intervalor I e K).*

(c) $I \cup K = (-3,3] = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x \leq 3\}$.

(d) $I \backslash J = (1,2) = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}$.

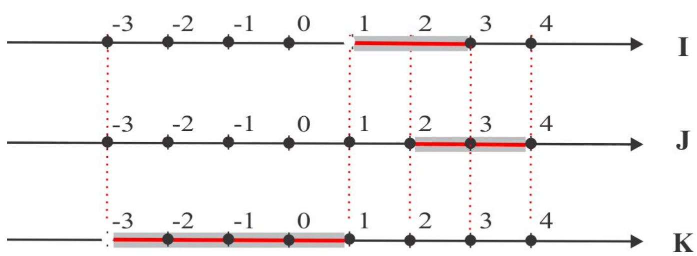


Figura 1.2: Operações com intervalos.

Usaremos os intervalos para representar o conjunto-solução de uma desigualdade e também o domínio e a imagem de uma função do Cálculo. Aliás, função é um dos entes matemáticos mais importantes, senão o mais importante, do Cálculo Diferencial e Integral.

Encerrando esta seção, vejamos algumas propriedades algébricas no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Se x, y e z são números reais, temos:

(P1) Comutativa : $x + y = y + x$.

(P2) Associativa : $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(P3) Distributiva : $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

(P4) Existência do Simétrico : $x + (-x) = 0$.

(P5) Existência do Inverso : $x \cdot (1/x) = 1, \quad x \neq 0.$

(P6) Associativa : $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$

(P7) Existência do Elemento Neutro :

(i) Na Adição: $x + 0 = x.$

(ii) No produto: $x \cdot 1 = x.$

(P8) Produtos Notáveis :

(i) Quadrado da Soma: $(x+y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2.$

(ii) Quadrado da Diferença: $(x-y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2.$

(iii) Produto da Soma pela Diferença: $(x+y) \cdot (x-y) = x^2 - y^2.$

► **ESCREVENDO PARA APRENDER 1.1**

1. Classifique as afirmações em verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), justificando cada resposta.

   (a) Se $x < 2$, então $x^2 < 4$. (b) Se $x^2 < 4$, então $x < 2$. (c) Se $0 \leq x \leq 2$, então $x^2 \leq 4$.

   (d) Se $x < 2$, então $x \leq 3$. (e) Se $x = 3$, então $x \leq 3$. (f) Se $|x| > 2$, então $x > 2$.

2. Se p é um número ímpar, então p^2 também o é. Como consequência deduza que se p^2 é par, então p também é par.

3. Se p é um número inteiro, tal que p^2 é divisível por 3, mostre que p também o é. Use este fato para mostrar que o número $\sqrt{3}$ não é racional.

4. Mostre que a soma e o produto de dois números racionais é um número racional. Dê exemplo de dois números irracionais x e y, tais que $x + y$ e $x \cdot y$ sejam racionais.

5. Sejam r um número racional e x um número irracional. Mostre que:

   (a) A soma $x + r$ é irracional (b) Se $r \neq 0$, o produto $x \cdot r$ é irracional.

6. Sejam x e y dois números irracionais, de tal forma que $x^2 - y^2$ seja um racional não nulo. Mostre que os números $x - y$ e $x + y$ são irracionais. Por exemplo, $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ e $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ são irracionais.

7. Reduza os números $x = 5,2121\ldots$ e $y = 0,21507507\ldots$ à forma de fração ordinária.

1.2 Desigualdades

► IMPLICAÇÃO & EQUIVALÊNCIA

Na sentença matemática $A \Rightarrow B$ (lê-se: "A implica B") dizemos que a afirmação A é condição suficiente e a afirmação B é condição necessária. A sentença nos diz que:

$$\boxed{\text{Se } [A] \text{ ocorrer, então } [B] \text{ ocorrerá.}}$$

ou, de forma equivalente:

$$\boxed{\text{Se } [B] \text{ não ocorrer, então } [A] \text{ não ocorrerá.}}$$

(é este o raciocínio por traz de uma "demonstração por absurdo")

Já a sentença $A \Leftrightarrow B$ (lê-se: "A se, e só se, B") diz que as afirmações A e B são equivalentes, isto é:

$$\boxed{A \Rightarrow B} \quad \text{e} \quad \boxed{B \Rightarrow A.}$$

EXEMPLO 1.2.1 *Se p é um número inteiro, a sentença:*

$$p \text{ é divisível por } 9 \Rightarrow p \text{ é divisível por } 3$$

é uma sentença verdadeira, enquanto a recíproca:

$$p \text{ é divisível por } 3 \Rightarrow p \text{ é divisível por } 9$$

é falsa; basta observar que 6 é divisível por 3, mas não por 9.

EXEMPLO 1.2.2 (Duas sentenças equivalentes) *As sentenças $x+2=-4$ e $x=-6$ são equivalentes, porque:*

$$x+2=-4 \Leftrightarrow x=-4-2 \Leftrightarrow x=-6.$$

▶ RESOLVENDO DESIGUALDADES

Quando resolvemos equações, em geral, transformamos ela, sucessivamente, em outras equivalentes, como fizemos no Exemplo 1.2.2. No caso de desigualdades, o processo é semelhante, com a ressalva:

uma desigualdade tem o sentido invertido ao ser multiplicada por uma constante negativa.

Em símbolos, temos as seguintes equivalências:

$$\boxed{x<y \Leftrightarrow -x>-y} \quad \text{e} \quad \boxed{x \le y \Leftrightarrow -x \ge -y.}$$

EXEMPLO 1.2.3 *Para resolver a desigualdade:* $2x-4>6$, *notamos que:*

$$2x-4>6 \Leftrightarrow 2x>4+6 \Leftrightarrow 2x>10 \Leftrightarrow x>\frac{10}{2} \Leftrightarrow x>5.$$

Observe que não houve multiplicação ou divisão por número negativo, de modo que a desigualdade não foi invertida. O conjunto solução S da desigualdade é: $S=\{x \in \mathbb{R} : x>5\}$ *ou* $S=(5,+\infty)$.

EXEMPLO 1.2.4 *Estudar o sinal da expressão $-4x+8$. Uma expressão pode ser positiva (>0), negativa (<0) ou nula $(=0)$. Primeiro, notamos que $-4x+8=0 \Leftrightarrow x=2$ e, por outro lado:*

$$-4x+8>0 \Leftrightarrow -4x>-8 \Leftrightarrow x<\frac{-8}{-4} \Leftrightarrow x<2.$$

Notamos que dividimos a desigualdade por -4 e, por isso, ela foi invertida. Portanto, a expressão é nula se $x=2$, é positiva se $x<2$ e, naturalmente, será negativa se $x>2$. Graficamente, temos:

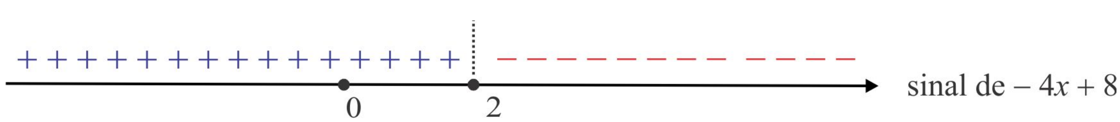


Figura 1.3: O sinal de $-4x+8$.

EXEMPLO 1.2.5 (Sinal de um Produto) *Para estudar o sinal da expressão* $(x-3)(2x+4)$*, recordemos uma regra básica do ensino fundamental:*

o produto de dois fatores será positivo se, e somente se, os fatores possuírem o mesmo sinal.

(i) *Para analisar o sinal do fator* $x-3$*, observamos que:*

$$x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \quad e \quad x-3>0 \Leftrightarrow x>3.$$

Assim, $x-3$ *será positivo no intervalo* $(3,+\infty)$ *e negativo no intervalo* $(-\infty,3)$*. Em* $x=3$ *a expressão se anula.*

(ii) *Já o sinal da expressão* $2x+4$ *é determinado notando que:*

$$2x+4=0 \Leftrightarrow x=-2 \quad e \quad 2x+4>0 \Leftrightarrow 2x>-4 \Leftrightarrow x>-2.$$

Portanto, a expressão $2x+4$ *será positiva no intervalo* $(-2,+\infty)$ *e negativa no intervalo* $(-\infty,-2)$*.*

(iii) *O sinal do produto* $(x-3)(2x+4)$ *é determinado observando a ilustração gráfica.*

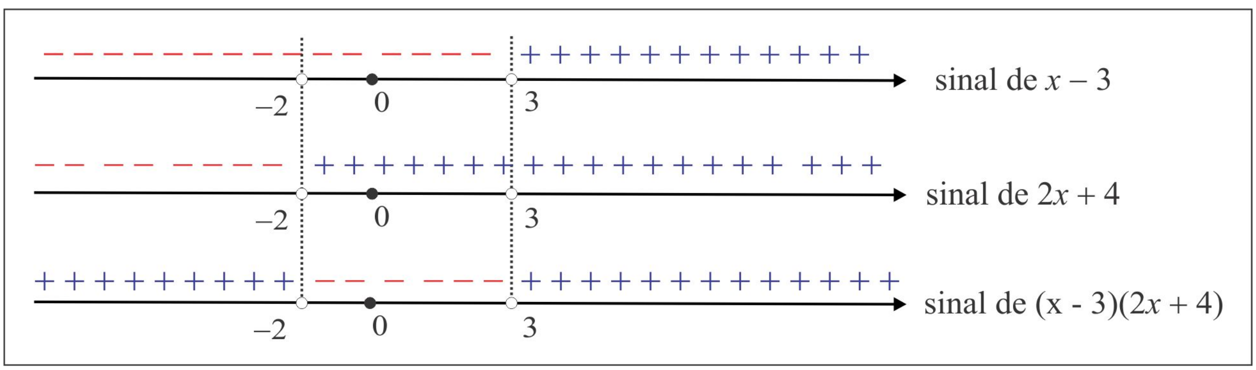


Figura 1.4: Figura do Exemplo 1.2.5..

As expressões $x-3$ *e* $2x+4$ *têm mesmo sinal se* $x<-2$*, neste aso ambas são negativas, ou* $x>3$*, caso em que ambas são positivas. Concluímos, portanto, que a expressão* $(x-3)(2x+4)$ *será positiva se* $x>3$ *ou* $x<-2$*, isto é, no conjunto* $(3,+\infty)\cup(-\infty,-2)$ *e negativa se* $-2<x<3$*, isto é, no intervalo aberto* $(-2,3)$*. Em* $x=3$ *ou* $x=-2$ *a expressão se anula.*

EXEMPLO 1.2.6 (Sinal de um Quociente) *O mesmo argumento do Exemplo 1.2.5 pode ser usado para estudar o sinal do quociente* $\dfrac{3x+4}{x-1}$.

Uma fração será positiva se, e somente se, numerador e denominador possuírem o mesmo sinal.

A ilustração gráfica para este caso nos diz que a expressão $\dfrac{3x+4}{x-1}$ *será positiva se* $x < -4/3$ *ou* $x > 1$, *isto é, no conjunto* $(-\infty, -4/3) \cup (1, +\infty)$ *e será negativa caso contrário, isto é, no intervalo aberto* $(-4/3, 1)$.

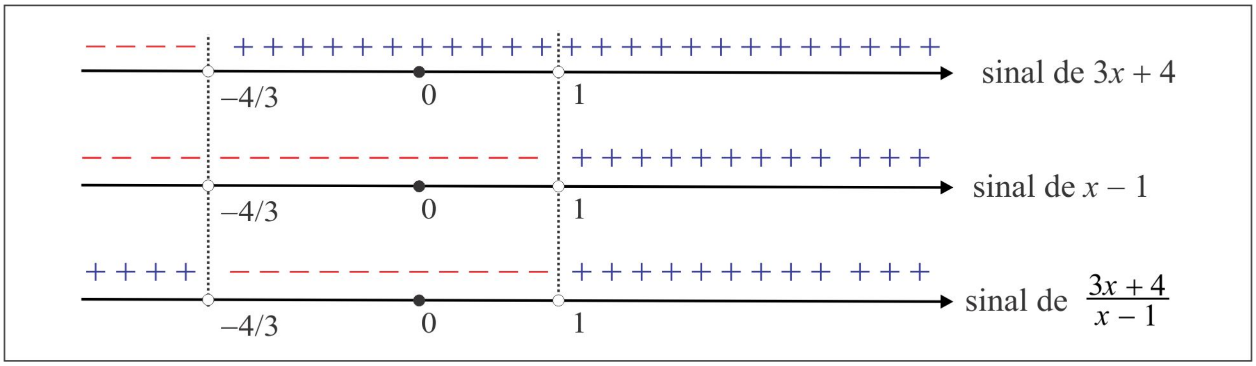


Figura 1.5: O sinal do quociente

EXEMPLO 1.2.7 (Sinal de um Trinômio do Segundo Grau) *Por trinômio do segundo grau entendemos qualquer expressão da forma* $ax^2 + bx + c$, *com* $a \neq 0$. *O sinal do trinômio depende exclusivamente dos coeficientes a, b e c que compõem o Discriminante* Δ, *dado por:*

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac.}$$

Há três casos a considerar.

1º Caso: $\mathbf{\Delta < 0.}$ *Neste caso, o sinal do trinômio coincide com o sinal de a. Por exemplo, no trinômio* $-x^2 + 2x - 4$, *temos que* $\Delta = 4 - 4(-1)(-4) = -12 < 0$ *e sendo* $a = -1$ *negativo, então o trinômio é negativo (mesmo sinal de a), isto é,* $-x^2 + 2x - 4 < 0$, *seja qual for o valor de x.*

2º Caso: $\mathbf{\Delta = 0.}$ *Neste caso o trinômio tem uma única raiz real, digamos* x_0, *e o sinal do trinômio é o mesmo de a, em todo* $x \neq x_0$.

3º Caso: $\mathbf{\Delta > 0.}$ *Este é o caso em que o trinômio tem duas raízes reais e distintas, digamos* x_1 *e* x_2, *dadas por:*

$$\boxed{\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},}$$

e o trinômio terá o mesmo sinal do coeficiente a, nos pontos x que não estiverem entre as raízes x_1 *e* x_2*; o sinal do trinômio será contrário ao do coeficiente a, se o ponto x estiver entre as raízes. Nas raízes* x_1 *e* x_2 *o trinômio, é claro, se anula. Na figura abaixo, ilustramos algumas situações e o leitor pode simular outras.*

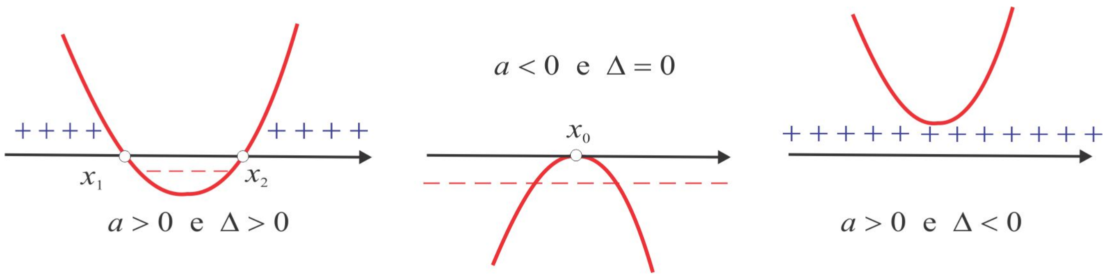


Figura 1.6: O sinal do Tiinômio $ax^2 + bx + c$.

EXEMPLO 1.2.8 *Em cada caso, vamos encontrar o conjunto-solução da desigualdade.*

(a) $x^2 - 3x + 2 < 0$ **(b)** $x^2 + x + 1 \leq 0$ **(c)** $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$.

Solução:

(a) O trinômio do tem coeficientes $a = 1$, $b = -3$ e $c = 2$ e o discriminante é $\Delta = 1 > 0$. As raízes são $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$ e, como vimos no 2º Caso do Exemplo 1.2.7, o trinômio será negativo (sinal contrário ao de a) se o x estiver entre as raízes. Assim, o conjunto solução é: $S = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}$ ou $S = (1, 2)$.

(b) Neste caso, $a = 1 > 0$ e $\Delta = -3 < 0$. O trinômio será positivo (mesmo sinal de a) em qualquer x. Portanto, a desigualdade não tem solução, isto é, $S = \varnothing$ (conjunto vazio)

(c) Agora temos $a = 4 > 0$ e $\Delta = 0$. O trinômio tem raiz (única) $x_0 = 1/2$ e será positivo (mesmo sinal de a) em qualquer $x \neq 1/2$. Assim, a desigualdade é atendida apenas em $x = 1/2$, onde o trinômio se anula.

EXEMPLO 1.2.9 *Resolver a desigualdade*: $x^2 + x - 3 \leq (x - 1)^2$.

Solução: O primeiro passo é deixar o segundo membro igual a 0 e, assim, o problema se reduz à análise do sinal do primeiro membro. Temos:

$$2x^2 + x - 3 \leq (x - 1)^2 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 \leq x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \leq 0.$$

O trinômio x^2+3x-4 tem discriminante $\Delta = b^2-4ac = 25$ e as raízes são $x_1 = 1$ e $x_2 = -4$. Portanto, o conjunto solução é $S = [-4, 1]$, constituído dos valores entre as raízes, incluindo as raízes, já que estamos lidando com o quantificador $\leq$ ("menor ou igual").

EXEMPLO 1.2.10 *Resolver a desigualdade:*

$$\boxed{x^3 - 4x^2 + 5x - 6 \leq 0.} \tag{1.4}$$

Solução: Primeiro, notamos que $x = 3$ é raiz do polinômio $x^3 - 4x^2 + 5x - 6$, o que pode ser verificado por uma substituição direta, de modo que:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 6 = (x-3)\left(x^2 - x + 2\right).$$

Considerando que o trinômio $x^2 - x + 2$ é sempre positivo $(\Delta < 0)$, resulta que:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)\left(x^2 - x + 2\right) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

Assim, o conjunto-solução da desigualdade (1.4) é $S = (-\infty, 3]$.

1.3 Valor Absoluto

Do ponto de vista geométrico, o que significa o *valor absoluto* ou *módulo* de um número real x? Consideremos sobre o eixo real os números inteiros -2 e 2, representando os pontos x_1 e x_2, respectivamente, como ilustra a figura abaixo.

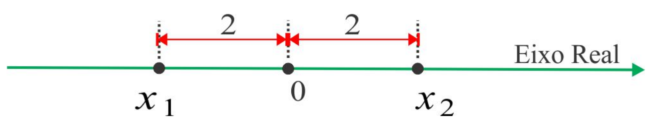


Figura 1.7: O Módulo como Distância

Vemos que a origem é o ponto médio dos pontos x_1 e x_2 e isto significa que os pontos x_1 e x_2 são simétricos em relação à origem e a distância de cada um deles à origem é duas unidades de comprimento. O módulo ou valor absoluto de um número real x, indicado por $|x|$, é definido como sendo a distância do ponto x à origem. Consequentemente, temos:

(i) $|-x| = |x|\,,\ \forall\ x,$ (x e $-x$ estão a mesma distância da origem).

(ii) Em se tratando de distância, segue que $|x| \geq 0,\ \forall\ x$.

(iii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (o único ponto cuja distância à origem é 0 é a própria origem).

(iv) Dado qualquer número real x, então:

$$|x| = \left| \begin{array}{lll} x, & \text{se} & x > 0 \\ 0, & \text{se} & x = 0 \\ -x, & \text{se} & x < 0. \end{array} \right.$$

Com base em (iv) é comum dizer que $|x| = \pm x$, lembrando que será x, se $x \geq 0$, e $-x$, se $x < 0$.

(v) PRODUTO & QUOCIENTE Dados x e y números reais, então:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \text{e} \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},\ \ y \neq 0.$$

Não caia na armadilha ao usar a relação: $|x + y| = |x| + |y|$, que não é válida em geral. Por exemplo:

$$|-3 + 5| = |2| = 2 \quad \text{e} \quad |-3| + |5| = 3 + 5 = 8.$$

(vi) RAIZ QUADRADA & VALOR ABSOLUTO Quando nos deparamos com o número $\sqrt{x^2}$ somos induzidos a pensar que seu valor é x. A raiz quadrada de um número real a, positivo ou zero, é o único numero positivo ou zero cujo quadrado é a. Seja qual for o número real x, temos:

$$x^2 = |x^2| = |x \cdot x| = |x| \cdot |x| = |x|^2$$

e, sendo assim, $|x|$ é o único numero ≥ 0, cujo quadrado é x^2. Logo: $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|.}$

▶ EQUAÇÕES ENVOLVENDO VALOR ABSOLUTO

Expressões envolvendo equações e módulo podem causar alguma dificuldade e devem ser tratadas com cuidado. Suponhamos que u e v sejam expressões envolvendo a variável x. Para se "livrar"do módulo, as seguintes equivalências são geralmente usadas:

$$\boxed{|u| = v \Leftrightarrow u = \pm v,\ \ v \geq 0} \quad \text{e} \quad \boxed{|u| = |v| \Leftrightarrow u^2 = v^2.} \tag{1.5}$$

EXEMPLO 1.3.1 *Resolver a equação* $|4x-5|=2.$

Solução: Considerando $u=4x-5$ e $v=2$, temos por $(1.5)_1$:

$$|4x-5|=2 \Leftrightarrow 4x-5=\pm 2.$$

O que temos acima são duas equações algébricas, que serão tratadas separadamente. primeiro, a equação $4x-5=2$ nos dá a solução $x=7/4$; a segunda equação $4x-5=-2$ nos dá a solução $x=3/4$. O conjunto-solução da equação original é: $S=\{3/4,7/4\}$ (não é intervalo, mas um conjunto com dois elementos)

EXEMPLO 1.3.2 *Resolver a equação*: $|x-5|=1-2x.$

Solução: Como $|x-5|\geq 0$, devemos ter $1-2x\geq 0$, isto é, $x\leq 1/2$. Com essa ressalva, a equação original é equivalente a:

$$\left|\begin{array}{lcl} x-5 & = & 1-2x \quad \text{ou} \\ x-5 & = & -(1-2x) \end{array}\right.$$

Se $x-5=1-2x$, então $x=2$; se $x-5=-1+2x$, então $x=-4$. O valor $x=2$ é incompatível com a ressalva $x\leq 1/2$ e, portanto, a única solução é $x=-4$.

EXEMPLO 1.3.3 *Resolver a equação*: $|x-2|=|x+3|.$

Solução: Usando $(1.5)_2$, com $u=x-2$ e $a=x+3$, obtemos:

$$\begin{aligned} |x-2|=|x+3| &\Leftrightarrow (x-2)^2=(x+3)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2-4x+4=x^2+6x+9 \\ &\Leftrightarrow 10x=-5 \\ &\Leftrightarrow x=-1/2. \end{aligned}$$

EXEMPLO 1.3.4 *Resolver a equação*: $\sqrt{(2-x)^2}=4$

Solução: Lembrando que $\sqrt{u^2} = |u|$, obtemos:

$$\sqrt{(2-x)^2} = 4 \Leftrightarrow |2-x| = 4 \Leftrightarrow 2-x = \pm 4 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 6.$$

O conjunto-solução é $S = \{-2, 6\}$ (conjunto com dois elementos).

▶ INEQUAÇÕES ENVOLVENDO VALOR ABSOLUTO

Vejamos duas equivalências envolvendo desigualdade modular que aparecem com frequência e cujas demonstrações serão concebidas a partir da ilustração gráfica abaixo:

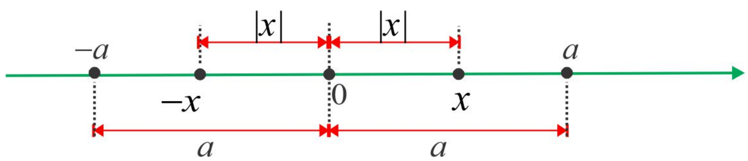


Figura 1.8: $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

Dado um número real $a \geq 0$, então:

$$\boxed{|u| \leq a \Leftrightarrow -a \leq u \leq a} \quad \text{e} \quad \boxed{|u| \geq a| \Leftrightarrow u \geq a \;\text{ ou }\; u \leq -a.} \qquad (1.6)$$

Equivalências similares ocorrem se tivermos $<$ no lugar de $\leq$. Assim:

$$\boxed{|u| < a \Leftrightarrow -a < u < a} \quad \text{e} \quad \boxed{|u| > a| \Leftrightarrow u > a \;\text{ ou }\; u < -a.} \qquad (1.7)$$

EXEMPLO 1.3.5 *Resolver a desigualdade:* $|2x-1| < 2$.

Solução: Da desigualdade básica (1.6), com $u = 2x-1$ e $a = 2$, vem:

$$|2x-1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 2x-1 \leq 2 \Leftrightarrow -2+1 \leq 2x \leq 2+1 \Leftrightarrow -1/2 \leq x \leq 3/2.$$

As desigualdades podem ser analisadas separadamente. Temos:

(i) $2 \leq 2x-1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x \Leftrightarrow -1/2 \leq x$. $\quad (S_1 = [-1/2, +\infty))$

(ii) $2x-1 \leq 2 \Leftrightarrow 2x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 3/2$. $\quad (S_2 = (-\infty, 3/2])$

O conjunto-solução S é a interseção dos intervalos S_1 e S_2, isto é: $\quad S = S_1 \cap S_2 = [-1/2, 3/2]$.

EXEMPLO 1.3.6 *Resolver a inequação:* $|x+3| \geq 1$.

Solução: Temos por (1.6) que:

$$|x+3| \geq 1 \Leftrightarrow x+3 \geq 1 \quad \text{ou} \quad x+3 \leq -1.$$

Ora, $x+3 \geq 1$ nos dá $x \geq -2$, isto é, $x \in [-2, +\infty)$, enquanto $x+3 \leq -1$ nos dá $x \leq -4$, isto é, $x \in (-\infty, -4)$. Na teoria ingênua dos conjuntos, o conectivo "ou" refere-se à união, enquanto o conectivo "e" refere-se à interseção. Assim, o conjunto-solução da desigualdade é: $S = (-\infty, 4] \cup [-2, +\infty)$.

EXEMPLO 1.3.7 *Resolver a inequação* $|x+1| < |2x-1|$.

Solução: Para eliminar os módulos, elevamos a desigualdade ao quadrado e obtemos:

$$(x+1)^2 < (2x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 < 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x > 0.$$

Resta-nos analisar o sinal do trinômio $3x^2 - 6x$, com raízes 0 e 2, e selecionar o conjunto onde ele é positivo.

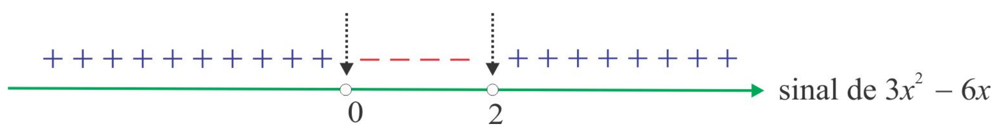


Figura 1.9: O sinal de $3x^2 - 6x$.

Observando o gráfico, encontramos os conjunto-solução $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ ou } x > 2\}$. Com a notação de intervalo, temos: $S = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

► **DUAS DESIGUALDADES CLÁSSICAS** Sejam x e y dois números reais arbitrários.

DESIGUALDADE TRIANGULAR: $\boxed{|x+y| \leq |x| + |y|}$

Prova: Em um contexto mais geral em que x, y e $x+y$ representam os lados de um triângulo, esta desigualdade estabelece que o comprimento de um lado não excede a soma dos outros dois. Daí o nome Desigualdade Triangular. Considerando que $x \leq |x|$, $\forall\, x$, temos:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \leq |x|^2 + 2\,|x|\,|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

e daí resulta $\sqrt{(x+y)^2} \leq \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$, isto é, $|x+y| \leq |x| + |y|$.

CONSEQUÊNCIA: $\boxed{\big||x| - |y|\big| \le |x-y|}$

Prova: Diante de (1.6), com $u = |x| - |y|$ e $a = |x-y|$, é suficiente mostrar que:

$$\boxed{-|x-y| \le |x| - |y| \le |x-y|.} \tag{1.8}$$

Da desigualdade triangular, segue que:

(i) $|x| = |x - y + y| \le |x-y| + |y| \Leftrightarrow |x| - |y| \le |x-y|$.

(ii) $|y| - |x| \le |y-x| \Leftrightarrow |x| - |y| \ge -|x-y|$.

Combinando (i) e (ii), chegamos a (1.8).

▶ ESCREVENDO PARA APRENDER 1.2

1. Estude o sinal de cada uma das expressões abaixo.

   (a) $\dfrac{x-1}{x-2}$ (b) $(2x+1)(x-2)$ (c) $\dfrac{2-3x}{x+2}$ (d) $x(x-1)(2x+3)$

   (e) $(2x-1)\left(x^2+1\right)$ (f) $x\left(x^2+3\right)$ (g) $x^6\left(x^2+3\right)$ (h) $-x\left(x^2-4\right)$.

2. Resolva as desigualdades.

   (a) $x^2 - 4 > 0$ (b) $x^2 - 1 \le 0$ (c) $x^2 \le 4$ (d) $x^2 > 1$ (e) $(x-a)^2 < r^2,\ r \ge 0$.

3. Resolva as equações.

   (a) $|x| = 2$ (b) $|x+1| = 3$ (c)$|2x-1| = 1$ (d) $|x-2| = -1$

   (e) $|2x+3| = 0$ (f) $|x| = 2x+1$ (g) $|1-2x| = |3x+5|$ (h) $\sqrt{(x-4)^2} = -1$

   (i) $\sqrt{(x-1)^2} = 5$ (j) $\sqrt{(2-x)^2} = 4$ (k) $\left|\dfrac{x}{1-5x}\right| = 4$ (l) $x = \sqrt{(-4)^2}$

4. As desigualdades abaixo, envolvendo produtos e quocientes, podem ser resolvidas por meio do estudo do sinal, como no Exercício 9 da Seção 1.1.

   (a) $(4x+7)^{20}(2x+8) < 0$ (b) $x(2x-1)(x+1) > 0$ (c) $\sqrt[3]{x^2-1} \le 0$ (d) $\dfrac{2x-1}{x-3} > 5$

   (e) $\dfrac{x}{2x-3} \le 3$ (f) $(2x-1)(x+3) < 0$ (g) $\dfrac{2x-1}{x+1} < 0$ (h) $\dfrac{3x-2}{2-x} \le 0$

   (d) $\dfrac{x^2-9}{x+1} < 0$ (j) $(2x-1)\left(x^2-4\right) \le 0$ $\dfrac{x-3}{x^2+1} > 5$ (i) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4} > 0.$

5. Resolva as Desigualdades.

(a) $x^2 - 3x + 2 < 0$ (b) $x^2 + x + 1 \leq 0$ (c) $3x^2 + x - 2 > 0$

(d) $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$ (e) $x^2 + 3 > 0$ (f) $x^2 + x + 1 > 0$

(g) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ (h) $x^2 + 5 \leq 0$ (i) $(x-2)(x+3)(1-x) > 0$

(j) $x^2 + 1 < 3x - x^2 - 3$ (k) $x(x+4)^2(x-2)^{-4} < 0$ (l) $\left(x^2 - 4\right)\left(x^2 - 3x + 2\right) \leq 0$

6. Dê o conjunto solução de cada uma das inequações modulares abaixo.

(a) $|x| \leq 1$ (b) $|2x - 1| < 3$ (c) $|x| > 3$ (d) $|3x + 3| \leq 1/3$

(e) $\left|2x^2 - 1\right| < 1$ (f) $|3x - 1| < -2$ (g) $|x + 3| \geq 1$ (h) $|2x - 1| < x$

(i) $|x + 1| < |2x - 1|$ (j) $|x - 2| - |x - 5| > x$ (k) $\left|(x-1)^3\right| < 1$ (l) $|x - 1| + |x + 3| < |4x|$

7. Duas desigualdades são ditas *equivalentes*, se possuem o mesmo conjunto de soluções. Com base nesta definição, classifique os pares de desigualdades abaixo.

(a) $\sqrt{x-1} < \sqrt{2-x}$ e $x - 2 < 1 - x$ **(b)** $x^2 > 1$ e $1 + \dfrac{2}{x-1} > 0.$

8. Resolva os sistemas de inequações.

(a) $\left|\begin{array}{l} 8x - 2 < x - 1 \\ 2x^2 - x \leq 1 \end{array}\right.$ (b) $\left|\begin{array}{l} 4x^2 - 4x - 3 < 0 \\ 1/x^2 \geq 1 \end{array}\right.$

9. Mostre que:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2, \quad \forall\, x > 0.$$

10. Mostre que não existem números reais x e y, tais que:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}.$$

RESPOSTAS & SUGESTÕES

ESCREVENDO PARA APRENDER 1.1

1. Uma sentença *falsa* pode ser justificada com um contra-exemplo, o qual consiste de dados que atendam à hipótese, mas, não à tese. Por exemplo, se a sentença

$$\underbrace{x < 2}_{\text{hipótese}} \;\Rightarrow\; \underbrace{x^2 < 4}_{\text{tese}}$$

fosse verdadeira, ela seria válida em qualquer valor atribuído à variável x. Note que para $x = -3$ a hipótese é atendida, mas a tese não.

Por outro lado, uma sentença verdadeira deve ser justificada usando conceitos e/ou regras, sem particularizar os dados. Por exemplo, a sentença

$$\underbrace{x^2 < 4}_{\text{hipótese}} \Rightarrow \underbrace{x < 2}_{\text{tese}}$$

é verdadeira. De fato:

$$x^2 < 4 \Rightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{4} \Rightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

e, em particular, conclui-se que $x < 2$, que é a tese.

(a) F (b) V (c) V (d) V (e) V (f) F.

2. Se p é ímpar, então existe um inteiro k, tal que $p = 2k + 1$. Logo,

$$p^2 = (2k+1)^2 = 2m + 1, \qquad \text{onde } m = 2k^2 + 2k,$$

e, portanto, p^2 é um número ímpar.

Para provar que $\sqrt{2}$ não é um número racional, raciocinemos por absurdo. Se $\sqrt{2}$ fosse racional, ele se escreveria sob a forma irredutível $\sqrt{2} = p/q$, sendo p e q inteiros e $q \neq 0$. Assim,

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2. \tag{1.9}$$

De (1.9) segue que p e q são números pares, contradizendo a irredutibilidade da fração $\frac{p}{q}$.

3. Mais uma vez usaremos a Demonstração por Absurdo. Se p não fosse divisível por 3, então o resto da divisão de p por 3 seria um inteiro $r \neq 0$, isto é, $p = 3k + r$ e, por conseguinte, teríamos

$$p^2 = 3\left(3k^2 + 2kr\right) + r^2 = 3m + r^2 \tag{1.10}$$

Segue de (1.10) que o resto da divisão de p^2 por 3 não é zero, contradizendo a divisibilidade de p^2 por 3, que é a hipótese da sentença a ser provada.

4. Sejam $r = p/q$ e $s = m/n$ dois números racionais. Temos:

$$r + s = \frac{np + mq}{nq} \quad \text{e} \quad r \cdot s = \frac{mp}{nq}$$

são números racionais (quociente de dois números inteiros). Considere os irracionais $x = \sqrt{2}$ e $y = -\sqrt{2}$. Então, $x + y = 0$ e $x \cdot y = -2$ são ambos racionais.

5. Seja $r = p/q$ um número racional qualquer.

   (a) Se $x + r$ fosse racional, então existiriam inteiros m e n, $n \neq 0$, tais que $x + r = m/n$. Assim,

   $$x + r = \frac{m}{n} \Rightarrow x = \frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - np}{nq}$$

   de onde deduzimos que x é racional (quociente de dois inteiros), contradizendo a hipótese.

   (b) Se o produto $x \cdot r$ fosse racional, então

   $$x \cdot r = \frac{m}{n} \Rightarrow x = \frac{mq}{np}$$

   e daí resultaria x racional, contradizendo a hipótese.

6. Por hipótese, x e y são irracionais e $x^2 - y^2$ é um racional não nulo, de modo que podemos escrever

   $$(x - y)(x + y) = \frac{p}{q}. \tag{1.11}$$

   Se, por exemplo, $x - y$ fosse racional, segue de (1.11) que $x + y$ também seria racional e, portanto,

   $$x = \tfrac{1}{2}\left[(x - y) + (x + y)\right]$$

   seria racional, contradizendo a hipótese.

7. O número racional $x = 5,212121\ldots$ tem período $T = 21$ e temos:

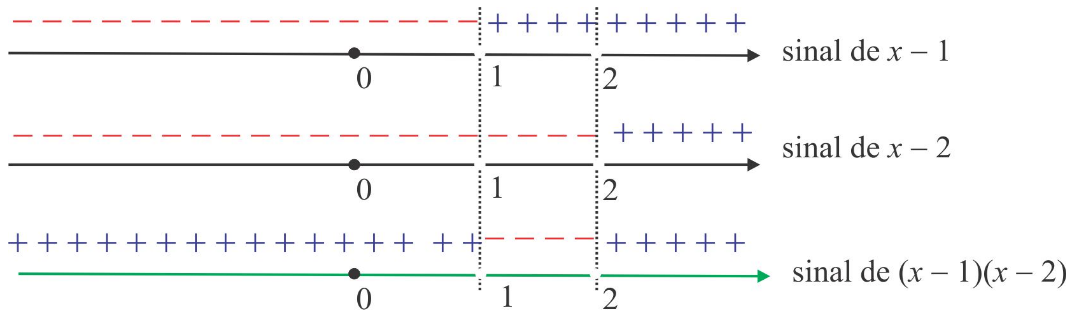
   $$x = 5,212121\ldots = 5 + \frac{21}{99} = \frac{516}{99}.$$

   De forma similar, encontramos:

   $$y = 0,21507507\ldots = \frac{1}{100}(21,507507) = \frac{1}{100}\left(21 + \frac{507}{999}\right) = \frac{21486}{99900}.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 1.2

1. Como ilustração, veja na figura abaixo como se obtém o sinal da expressão $(x-1)(x-2)$.



Vemos que a expressão $(x-1)(x-2)$ é positiva se $x<1$ ou $x>2$ e é negativa se $1<x<2$.

	positiva	negativa	zero	indefinida
(a)	$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$	$(1,2)$	$\{1\}$	$x=2$
(b)	$(-\infty,-1/2)\cup(2,+\infty)$	$(-1/2,2)$	$\{-1/2,2\}$	
(c)	$(-2,2/3)$	$(-\infty,-2)\cup(2/3,+\infty)$	$\{2/3\}$	$x=-2$
(d)	$(-3/2,0)\cup(1,\infty)$	$(-\infty,-3/2)\cup(0,1)$	$\{0,1,-3/2\}$	
(e)	$(1/2,+\infty)$	$(-\infty,1/2)$	$\{1/2\}$	
(f)	$(0,+\infty)$	$(-\infty,0)$	$\{0\}$	

2. **(a)** $x^2>4 \Leftrightarrow |x|>2 \Leftrightarrow x>2 \quad \text{ou} \quad x<-2.$

   (b) $x^2\le 1 \Leftrightarrow |x|\le 1 \Leftrightarrow -1\le x\le 1.$

   (c) $x^2\le 4 \Leftrightarrow |x|\le 2 \Leftrightarrow -2\le x\le 2.$

   (d) $x>1$ ou $x<-1$.

   (e) $(x-a)^2<r^2 \Rightarrow |x-a|<r \Leftrightarrow a-r<x<a+r.$

3. Decorre da definição de Valor Absoluto que $|\square|=a \Leftrightarrow \square=\pm a$. Esta é a propriedade a ser usada.

(a) $x=\pm 2$	(b) $x=2$ ou $x=-4$	(c) $x=0$ ou $x=1$	(d) $\varnothing$
(e) $x=-3/2$	(f) $x=-1/3$	(g) $x=-4/5$ ou $x=-6$	(h) $\varnothing$
(i) $x=6$ ou $x=-4$	(j) $x=-2$ ou $x=6$	(k) $x=4/21$ ou $x=4/19$	(l) $x=4$

4. Expressemos as respostas na forma de intervalo.

   (a) Na expressão $(4x+7)^{20}(2x+8)$ vemos que o primeiro fator é positiva e a expressão será negativa quando $2x-8<0$, isto é, $x<-4$.

(b) $-1 < x < 0$ ou $x > 1/2$. Na forma de intervalo, temos $(-1,0) \cup (1/2,+\infty)$.

(c) $[-1,1]$.

(d) $(3,14/3)$.

(e) $(3/2,9/5]$.

(f) $(-\infty,3/2) \cup (9/5,+\infty)$.

(g) $(-1,1/2)$.

(h) $(-\infty,2/3] \cup (2,+\infty)$.

5. O sinal do trinômio $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, está associado ao sinal do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

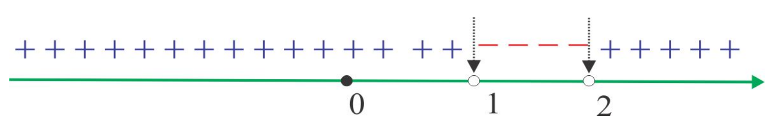
- Se $\Delta < 0$, então o trinômio terá o mesmo sinal do coeficiente a, seja qual for o valor que se atribua a x.
- Se $\Delta > 0$, então o trinômio terá o mesmo sinal do coeficiente a, se o x não estiver entre as raízes x_1 e x_2 e terá sinal contrário ao de a, se o x estiver entre as raízes.
- Se $\Delta = 0$, o trinômio terá uma única raiz real x_0 e o sinal coincide com sinal de a, se $x \neq x_0$.

(a) $x^2 - 3x + 2 < 0$, $\quad \Delta = 1 > 0$.

As raízes são $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$ e o trinômio será < 0 quando $1 < x < 2$. O conjunto solução é

$$S = (1,2) \quad \text{ou} \quad S = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}.$$

Veja a ilustração na figura abaixo.



(b) $x^2 + x + 1 \leq 0$, $\quad \Delta = -3 < 0$. Conjunto solução $S = \varnothing$ (conjunto vazio).

(c) $3x^2 + x - 2 > 0$, $\quad \Delta = 25 > 0$. Conjunto solução $S = (-\infty,-1) \cup (2/3,+\infty)$.

(d) $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$, $\quad \Delta = 0$. Conjunto solução $S = \{1/2\}$ (conjunto unitário).

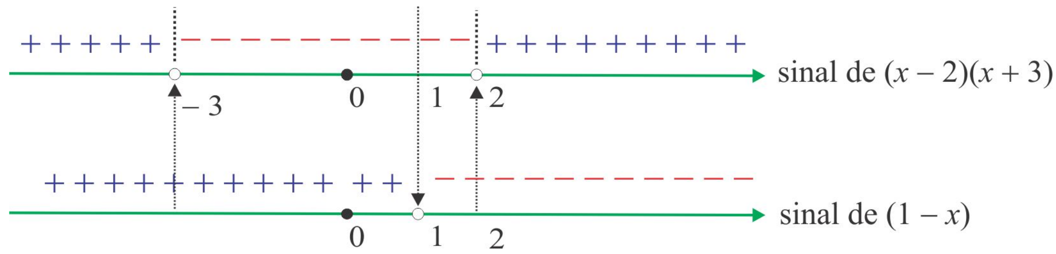
(e) $x^2 + 3 > 0$, $\quad \Delta = -12 < 0$. Conjunto solução $S = \mathbb{R}$ ou $S = (-\infty,+\infty)$.

(f) $x^2 + x + 1 > 0$, $\quad \Delta = -3 < 0$. Conjunto solução $S = \mathbb{R}$ ou $S = (-\infty,+\infty)$.

(g) $x^2 - 5x + 6 \geq 0, \quad \Delta = 1 > 0$. Conjunto solução $S = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.

(h) $x^2 + 5 \leq 0, \quad \Delta = -20 < 0$. Conjunto solução $S = \varnothing$ (conjunto vazio).

(i) $(x-2)(x+3)(1-x) > 0$. Para começar, veja a ilustração na figura abaixo.



O conjunto solução é $S = (-\infty, -3) \cup (1, 2)$.

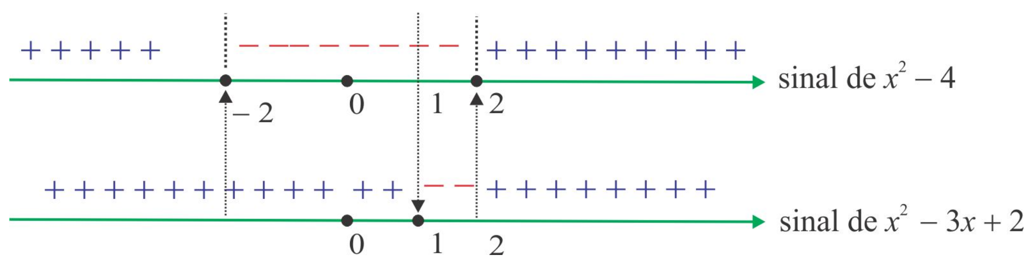
(j) A desigualdade proposta é equivalente a $2x^2 - 3x + 4 < 0$, onde temos $a = 2$ e $\Delta = -23 < 0$. O trinômio será sempre positivo (tem o mesmo sinal de) O conjunto solução $S = \varnothing$.

(k) O termo $(x+4)^2 (x-2)^{-4}$ é não negativo, exceto quando $x = 2$. O sinal de $x(x+4)^2(x-2)^{-4}$ depende tão somente do sinal de x. Assim,

$$x(x+4)^2(x-2)^{-4} < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

e o conjunto solução é $S = (-\infty, 0)$.

(l) Veja na figura os sinais dos trinômios $x^2 - 4$ e $x^2 - 3x + 2$ e deduza que o conjunto solução é $S = [-2, 1] \cup \{2\}$.



6. Quando possível, é oportuno escrever a resposta na forma de intervalo.

(a) $S = [-1, 1]$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$.

(b) $S = (-1, 2)$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 2\}$.

(c) $S = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : x < -3$ ou $x > 3\}$.

(d) $S = [-10/9, -8/9]$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : -10/9 \le x \le -8/9\}$.

(e) $S = (-1, 0) \cup (0, 1)$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1 \quad \text{e} \quad x \neq 0\}$.

(f) $S = \varnothing$ (conjunto vazio).

(g) $S = (-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : x \le -4 \text{ ou } x \ge -2\}$.

(h) $S = (1/3, 1)$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : 1/3 < x < 1\}$.

(i) $S = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \quad \text{ou} \quad x > 2\}$.

(j) $S = (-\infty, -3)$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : x < -3\}$.

(k) $S = (0, 2)$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 2\}$.

(l) $S = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : x < -1 \quad \text{ou} \quad x > 1\}$.

7. **(a)** Não equivalentes.

   (b) O conjunto-solução das desigualdades é $S = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Elas são equivalentes.

8. Em cada caso, o conjunto-solução do sistema é a interseção dos conjuntos que representam as soluções de cada desigualdade.

   (a) $S = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{7})$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : -1/2 < x < 1/7\}$.

   (b) $S = [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, 1]$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : -1/2 \le x < 0 \text{ ou } 0 < x \le 1\}$.

9. Basta observar que se $x > 0$, então

$$x + \frac{1}{x} \ge 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \ge 0$$

   e esta última desigualdade é válida seja qual for o valor real que se atribua a x.

10. Se existissem tais números x e y satisfazendo

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$$

   teríamos

$$x^2 + xy + y^2 = 0 \tag{1.12}$$

   e, olhando (1.12) como uma equação do segundo grau em x, vemos que $\Delta = -3y^2 < 0$ e a equação não tem solução.

2.1 O Plano Cartesiano

Os números reais representaram os ponto de uma reta (o eixo x) e cada número é a coordenada do ponto que ele representa. Para associar aos pontos de um plano duas coordenadas, consideremos nesse plano dois eixos orientados (duas cópias de $\mathbb{R}$) e mutuamente perpendiculares, se interceptando no ponto O, denominado origem. Graficamente, consideramos um dos eixos (o eixo x) horizontal, orientado da esquerda para a direita, e o outro vertical (o eixo y), orientado de baixo para cima. Por um ponto genérico P do plano, traçamos retas paralelas aos eixos Ox e Oy, interceptando-os nos pontos A e B, respectivamente, de coordenadas x e y, como ilustra a Figura 2.1.

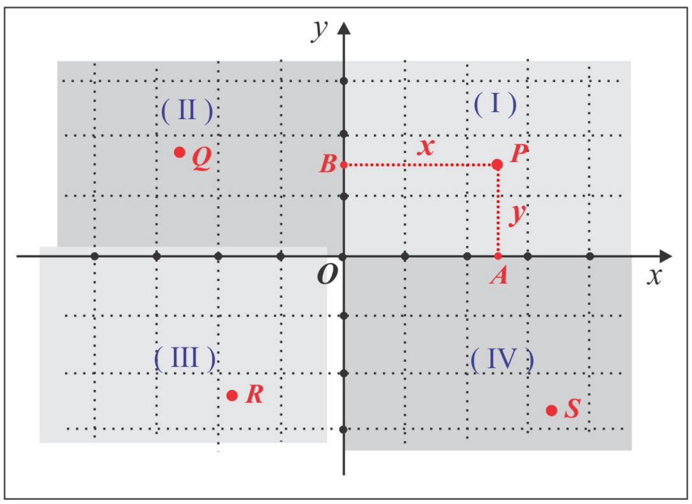


Figura 2.1: O Plano xy

A cada ponto P associamos o par ordenado de números reais (x, y) e essa correspondência é biunívoca, isto é, cada ponto P determina e é determinado por um único par ordenado (x, y). O número x, que aparece em primeiro lugar e mede, em valor absoluto, a distância do ponto ao eixo Oy, recebe o nome de *abscissa* do ponto P, enquanto y é a *ordenada* de P e mede, em valor absoluto, a distância do ponto ao eixo Ox. Um tal sistema de eixos recebe a denominação de *sistema cartesiano ortogonal* e determina no plano quatro quadrantes, assim caracterizados:

1º QUADRANTE (I): Constituído dos pontos (x, y), com $x \geq 0$ e $y \geq 0$ (ponto P).

2º QUADRANTE (II): Constituído dos pontos (x, y), com $x \leq 0$ e $y \geq 0$ (ponto Q).

3º QUADRANTE (III): Constituído dos pontos (x, y), com $x \leq 0$ e $y \leq 0$ (ponto R).

4º QUADRANTE (IV): Constituído dos pontos (x, y), com $x \geq 0$ e $y \leq 0$ (ponto S).

2.1.1 Coordenadas do Ponto Médio

Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ dois pontos do plano xy e deixe $M(x_M, y_M)$ ser o ponto médio do segmento AB, como ilustra a Figura 2.2 ao lado. A partir da semelhança dos triângulos MAC e MBD, deduzimos que:

$$\frac{BD}{MC} = \frac{MB}{AM} = 1 \Leftrightarrow BD = MC,$$

de onde resulta que: $y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$. De modo similar, obtemos $x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ e o ponto médio M tem coordenadas:

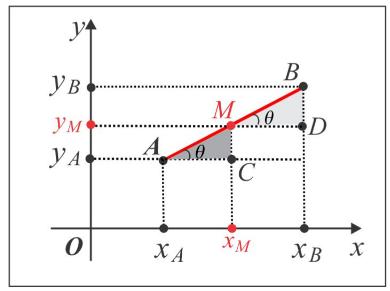


Figura 2.2: O Ponto Médio

$$\boxed{x_M = \frac{x_A + x_B}{2}} \quad \text{e} \quad \boxed{y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.} \tag{2.1}$$

2.1.2 Distância entre dois Pontos

No eixo real $\mathbb{R}$ (em dimensão $n = 1$), dados dois números x_A e x_B, representando, respectivamente, os pontos A e B, ilustrado na Figura 2.3, a distância d entre os pontos A e B é dada por:

$$\boxed{d = |x_B - x_A|.} \tag{2.2}$$

Em dimensão $n = 2$ (no espaço $\mathbb{R}^2$ ou plano cartesiano xy), consideremos dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, como ilustrado na Figura 2.4, onde vemos que $AC = |x_B - x_A|$ e $BC = |y_B - y_A|$. Decorre do Teorema de Pitágoras a seguinte fórmula da distância entre os pontos A e B:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.} \tag{2.3}$$

Se em (2.3) considerarmos $y_A = 0$ e $y_B = 0$, obtemos a fórmula (2.2).

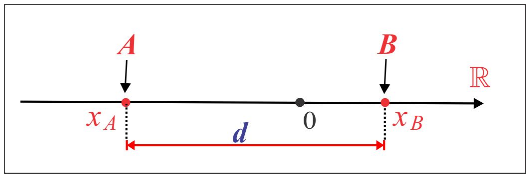


Figura 2.3: Distância em $\mathbb{R}$

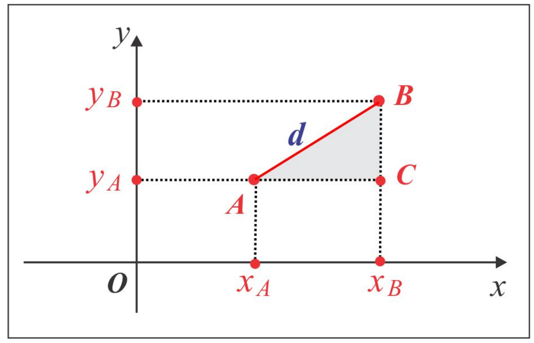


Figura 2.4: Distância em $\mathbb{R}^2$

EXEMPLO 2.1.1 *Calcular a distância entre os pontos $A(-1,3)$ e $B(2,-4)$.*

Solução: O cálculo é feito por substituição direta das coordenadas dos pontos na fórmula. Temos:

$$d = \sqrt{[2-(-1)]^2 + [(-4)-3]^2} = \sqrt{3^2+7^2} = \boxed{\sqrt{58}.}$$

2.1.3 Translação de Eixos

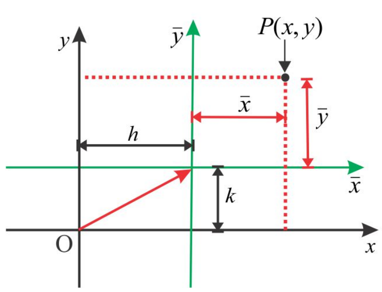


Figura 2.5: Translação

Suponhamos que o sistema cartesiano xOy seja transladado para uma nova origem $\overline{O}$, de coordenadas (h,k), como ilustrado na Figura 2.5 ao lado. Sejam (x,y) e $(\overline{x},\overline{y})$ as coordenadas de um ponto P nos sistemas xy e $\overline{x}\,\overline{y}$, respectivamente, e determinemos as relações entre essas coordenadas. Observando o gráfico, deduzimos as equações de mudança de variável produzidas pela translação:

$$\boxed{\bar{x} = x - h} \quad \text{e} \quad \boxed{\bar{y} = y - k.} \tag{2.4}$$

EXEMPLO 2.1.2 *Como aplicação, vamos mostrar que a translação: $\overline{x} = x-4$ e $\overline{y} = y+2$ elimina os termos do primeiro grau na expressão: $x^2+y^2-8x+4y+5$. De fato, essa expressão é equivalente a:*

$$(x-4)^2 - 16 + (y+2)^2 - 4 + 5$$

e usando a mudança de variável, chegamos à expressão: $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 15$, a qual não contem termos do primeiro grau em $\bar{x}$ ou $\bar{y}$.

Para entender melhor as equações de translação (2.4), ressaltammos que o novo sistema $\bar{x}\bar{y}$ tem origem no ponto $\bar{O}(h,k)$ e a translação indica que o eixo x foi deslocado h unidades para cima ou para baixo, conforme h seja positivo ou negativo, e o eixo y sofre um deslocamento de k unidades para direita ou para esquerda, conforme k seja positivo ou negativo. O fato é que ao deslocar o eixo y para a direita a coordenada x de um ponto $P(x,y)$ diminui e ela aumenta se o deslocamento do eixo y se processar para o lado esquerdo da origem. Isto ocorre porque a coordenada x mede, em valor absoluto, a distância do ponto ao eixo y. Considerando que a coordenada y mede, em valor absoluto, a distância do ponto P ao eixo x, vemos que o deslocamento do eixo x para cima (resp. para baixo) faz a coordenada y aumentar (resp. diminuir).

2.1.4 Pontos Simétricos

Dado um ponto $A(x,y)$ do plano xy, uma mudança no sinal de uma coordenada do ponto A, acarreta uma reflexão do ponto A em torno do eixo x ou y e, caso haja mudança no sinal de x e y, o ponto A sofrerá uma reflexão em torno da origem.

Na Figura 2.6 ilustramos algumas reflexões de um ponto $A\,(x,y)$. O ponto $C(-x,-y)$ é o simétrico do ponto $A(x,y)$ em relação à origem; os pontos $B(-x,y)$ e $D(x,-y)$ são os simétricos do ponto $A\,(x,y)$ em relação aos eixos Oy e Ox, respectivamente.

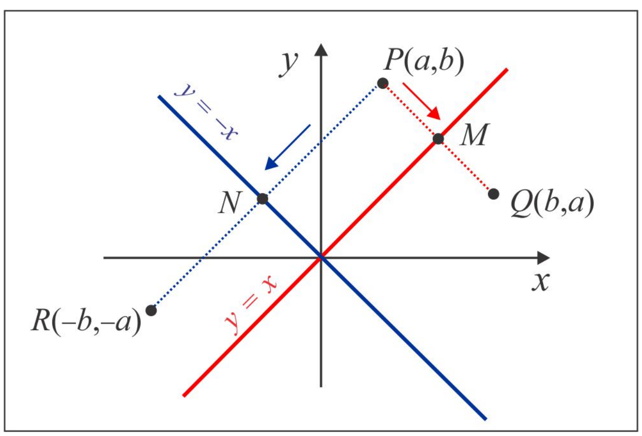


Figura 2.6: Pontos Simétricos

► **ESCREVENDO PARA APRENDER 2.1**

1. Encontre o ponto médio do segmento AB, sendo $A(2,1)$ e $B(4,-5)$.

2. Represente no plano cartesiano xy os pontos: $A(1,-2)$, $B(2,4)$ e $C(-2,0)$. Calcule a distância do ponto A ao ponto médio do segmento BC.

2.2 A Linha Reta

Normalmente, o eixo cartesiano Oy é desenhado na posição vertical , enquanto o eixo Ox na posição horizontal. Por esta razão, as retas paralelas ao eixo Oy costumam ser chamadas de retas verticais e as paralelas ao eixo Ox de retas horizontais. O fato é que todos os pontos de uma reta paralela ao eixo Oy têm a mesma abscissa x e os pontos de uma reta paralela ao eixo Ox têm a mesma ordenada y. A Figura 2.7 ilustra duas retas perpendiculares, a horizontal passando no ponto $(0,b)$, do eixo Oy e a vertical pelo ponto $(a,0)$ do eixo Ox. A reta vertical é descrita pela equação $x = a$ enquanto a horizontal por $y = b$.

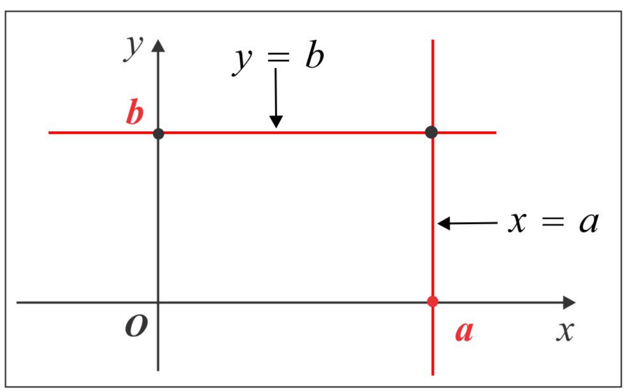


Figura 2.7: Reta Vertical e Reta Horizontal

No caso em que uma reta r não é vertical nem horizontal, é comum dizer que ela é inclinada em relação aos eixos coordenados e para determinar sua declividade, vamos fixar dois pontos $A(x_A, y_A)$

e $B(x_B, y_B)$ sobre a reta r, como ilustra a Figura 2.8, onde $\Delta y = y_B - y_A$ e $\Delta x = x_B - x_A$ são os acréscimos nas variáveis y e x, respectivamente. Note que $y_B = y_A + \Delta y$ e $x_B = x_A + \Delta x$ e isso justifica o nome acréscimo nas variáveis.

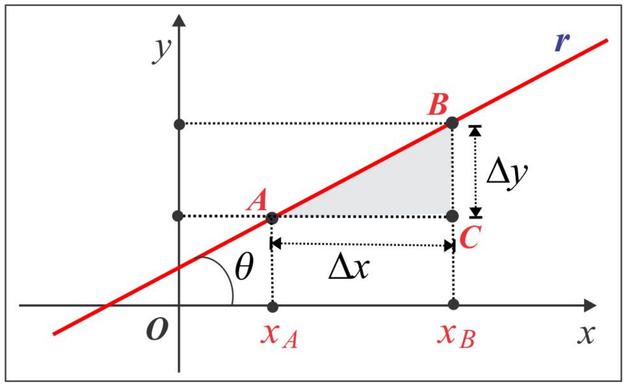


Figura 2.8: Reta Inclinada

Considerando que a reta não é vertical, temos $x_A \neq x_B$ e a quantidade

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

recebe o nome de *declividade* da reta r. No triângulo ABC vemos que $m = \tan\theta$, onde θ é o ângulo que a reta r faz com o eixo x.

Deixe-nos, agora, considerar um ponto genérico $P(x, y)$ sobre a reta r e determinemos a relação entre as coordenadas x e y do ponto P. Esta relação, denominada equação da reta r, descreve todos pontos da reta. Se na expressão da declividade usamos o ponto P no lugar do ponto B, encontramos:

$$m = \frac{y - y_A}{x - x_A} \Leftrightarrow y = y_A + m(x - x_A)$$

e, portanto, a reta r é descrita pela *equação cartesiana*: $\boxed{y = y_A + m(x - x_A).}$

EXEMPLO 2.2.1 *Vamos encontrar a equação da reta r, que passa nos pontos $A(1,1)$ e $B(-2,4)$.*

Solução: A reta tem declividade:

$$m_r = \frac{4-1}{-2-1} = -1$$

e sua equação é: $\boxed{y = -x + 2.}$

EXEMPLO 2.2.2 *Certa reta r do plano xy forma um ângulo de $\pi/4$ rad (45^o) com o eixo x e passa no ponto $A(-3, 2)$. Qual a equação da reta? O ponto $B(2, -5)$ está sobre a reta r?*

Solução: A declividade da reta é $m_r = \tan(\pi/4) = 1$ e ela passa por $A(-3, 2)$, de modo que sua equação é:

$$y = y_A + m(x - x_A) \Leftrightarrow y = 2 + 1 \times (x + 3) \Leftrightarrow \boxed{y = x + 5.}$$

O ponto B estará sobre a reta r se, e somente se, as coordenadas $x = 2$ e $y = -5$, do ponto B, atendem à equação da reta. Substituindo os valores de x e y, encontramos $-5 = 2 + 5$ que é uma sentença falsa e isso indica que o ponto B não pertence à reta r (a reta não passa pelo ponto B).

► ALGUNS COMENTÁRIOS

(a) A forma geral da equação cartesiana da reta no plano xy é: $ax + by + c = 0$ e quando $b \neq 0$ a equação pode ser posta na forma reduzida: $y = mx + n$, com $m = -a/b$ e $n = -c/b$.

(b) No caso em que a reta não é horizontal, isto é, com declividade $m \neq 0$, então:

- **(i)** $x = 0 \Rightarrow y = n$ e isto indica que a reta r passa no ponto $B(0, n)$ do eixo Oy. Aliás, os pontos do eixo Oy são da forma $(0, y)$, com $y \in \mathbb{R}$.
- **(ii)** $y = 0 \Rightarrow x = -n/m$ e isto indica que a reta passa no ponto $A(-n/m, 0)$ do eixo Ox. Os pontos do eixo Ox são da forma $(x, 0)$, com $x \in \mathbb{R}$.
- **(iii)** $n = 0 \Rightarrow y = mx$ e esta é a forma da equação de uma reta que passa pela origem $O(0, 0)$.

2.2.1 Forma Paramétrica da Equação da Reta

Uma reta r no plano xy pode ser representada por um par de equações a um parâmetro, denominadas *equações paramétricas* da reta r. Suponhamos que a reta r não seja vertical nem horizontal e consideremos sobre ela dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. A reta r tem equação cartesiana:

$$y = y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A),$$

que pode ser posta sob a forma:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}, \tag{2.5}$$

que é a *forma simétrica* da equação da reta r, e se designarmos a razão comum em (2.5) pelo parâmetro real t, descreveremos a reta r pelo par de equações:

$$\left| \begin{array}{l} x = x_A + (x_B - x_A)\, t \\ y = y_A + (y_B - y_A)\, t, \quad -\infty < t < +\infty. \end{array} \right. \tag{2.6}$$

Parametrizar a reta r significa descrevê-la em função de uma única variável: o parâmetro t. As equações paramétricas (2.6) estabelecem uma correspondência biunívoca entre os pontos $P(x, y)$ da reta e os parâmetros reais t, isto é, a cada número real t corresponde um único ponto $P(x, y)$ da reta r, com coordenadas x e y dadas por (2.6). Por exemplo, o ponto $A(x_A, y_A)$ corresponde a $t = 0$ enquanto o ponto $B(x_B, y_B)$ corresponde a $t = 1$. O segmento de reta AB, com ponto inicial A e ponto final B, é descrito pelas equações paramétricas (2.6), com $0 \leq t \leq 1$.

EXEMPLO 2.2.3 *Considere as retas*:

$$r : 2x - y + 4 = 0 \quad e \quad s : \left| \begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = -1 + 2t. \end{array} \right.$$

(a) *Encontrar dois pontos A e B da reta r e outros dois C e D da reta s.*

(b) *Descrever a reta r na forma parametrizada e a reta s na forma cartesiana.*

(c) *Determinar, caso exista, o ponto de interseção das retas r e s.*

Solução:

(a) Na forma cartesiana, caso da reta r, pontos da reta são encontrados atribuindo valores à variável x e calculando, a partir da equação, os correspondentes valores de y. Por exemplo:

$$x = 0 \Rightarrow y = 4; \quad A(0, 4)$$
$$x = 1 \Rightarrow y = 6; \quad B(1, 6).$$

Na forma paramétrica, caso da reta s, pontos são encontrados atribuindo valores ao parâmetro t e calculando os correspondentes x e y, a partir das equações paramétricas. Por exemplo:

$$t = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{e} \quad y = -1; \quad C(1, -1)$$
$$t = 1 \Rightarrow x = 0 \quad \text{e} \quad y = 1; \quad D(0, 1).$$

(b) Existem várias formas de parametrizar uma reta. Usando os pontos A e B já encontrados e as equações (2.6), obtemos:

$$r : \left| \begin{array}{l} x = 0 + t = t \\ y = 4 + 2t. \end{array} \right.$$

Para passar da forma paramétrica para a forma cartesiana, eliminamos o parâmetro t nas duas equações. No caso da reta s, temos:

$$t = 1 - x \quad \text{e} \quad t = \frac{y+1}{2} \Rightarrow 1 - x = \frac{y+1}{2} \Leftrightarrow 2x + y = 1.$$

(c) O ponto de interseção, caso exista, é a solução do sistema constituído das equações das retas r e s:

$$\left| \begin{array}{l} 2x - y = -4 \\ 2x + y = 1 \end{array} \right.$$

cuja solução é o ponto $E\,(-3/4, 5/2)$.

2.2.2 Posição Relativa de duas Retas

► **RETAS PARALELAS**

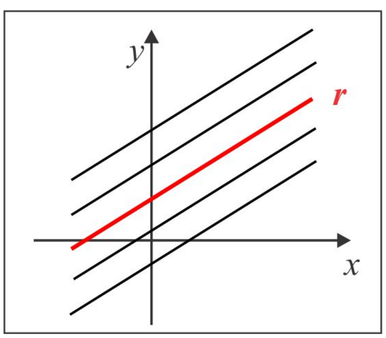


Figura 2.9: Retas Paralelas

Duas retas são paralelas quando forem verticais ou possuírem a mesma declividade. Dada uma reta r descrita pela equação:

$$r : y = mx + n, \quad m \neq 0,$$

as retas paralelas à reta r são aquelas governadas pela equação $y = mx+k$, onde cada valor atribuído à constante k produz uma reta paralela à reta r, como ilustrado na Figura 2.9.

EXEMPLO 2.2.4 *Qual a reta que passa no ponto* $A(2, -3)$ *é paralela à reta* $r : 3x + 2y - 4 = 0$?

Solução: A declividade da reta r é $m = -3/2$ e procuramos a reta que passa em $A(2, -3)$ e tem declividade $m = -3/2$. Tal reta é descrita por:

$$y = -3 + (-3/2)\,(x - 2) \Leftrightarrow \boxed{3x + 2y = 0.}$$

EXEMPLO 2.2.5 *Qual valor de m faz com que as retas $r: mx+5y+6=0$ e $s: 4x+(m+1)y-5=0$ sejam paralelas?*

Solução: As declividades das retas r e s são, respectivamente, $m_r = -\dfrac{m}{5}$ e $m_s = -\dfrac{4}{m+1}$ e igualando as declividades, encontramos:

$$\frac{m}{5} = \frac{4}{m+1} \Leftrightarrow m^2 + m - 20 = 0.$$

Resolvendo a equação do segundo grau, encontramos as raízes $m_1 = 4$ e $m_2 = -5$ e obtemos os seguintes pares de retas paralelas:

(i) a raiz $m_1 = 4$ produz as retas paralelas:

$$r_1 : 4x + 5y + 6 = 0 \quad \text{e} \quad s_1 : 4x + 5y - 5 = 0.$$

(ii) a raiz $m_2 = -5$ produz as retas paralelas:

$$r_2 : 5x - 5y - 6 = 0 \quad \text{e} \quad s_2 : 4x - 5y - 5 = 0.$$

► RETAS PERPENDICULARES

Consideremos as retas $r: y = m_1x + n_1$ e $s: y = m_2x + n_2$ e determinemos a condição para que elas sejam *perpendiculares* (ou *ortogonais*). Por simplicidade, vamos supor que as retas r e s passam pela origem, como sugere a Figura 2.10.

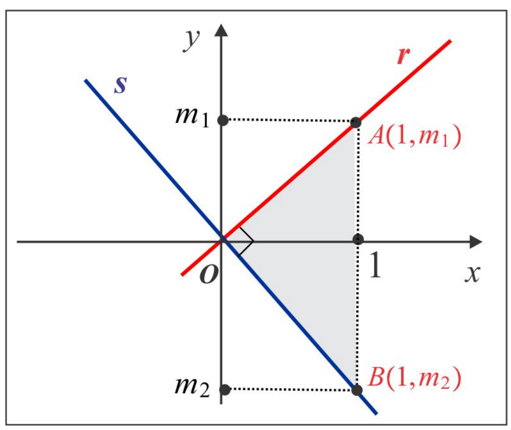


Figura 2.10: Retas Perpendiculares

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo AOB, resulta:

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2$$

e, considerando que $|AB|^2 = (m_2 - m_1)^2$, $|OA|^2 = 1 + m_1^2$ e $|OB|^2 = 1 + m_2^2$, obtemos:

$$(m_2 - m_1)^2 = 2 + m_1^2 + m_2^2 \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1.$$

A condição de ortogonalidade (perpendicularismo) é, portanto: $\boxed{m_1 m_2 = -1.}$

OBSERVAÇÃO 2.2.6 *É oportuno ressaltar que o caso geral se reduz a este, bastando para isto considerar duas retas r' e s' passando pela origem e paralelas às retas r e s, respectivamente.*

EXEMPLO 2.2.7 *Encontrar a equação cartesiana da reta que passa no ponto $A(-1,1)$ e é ortogonal (perpendicular) à reta $r : y = 2x - 4$.*

Solução: A declividade da reta r é $m = 2$ e qualquer reta ortogonal à reta r terá declividade m', tal que $mm' = -1$, isto é, $m' = -1/m = -1/2$. Assim, a reta procurada é descrita por:

$$y = 1 + (-1/2)(x + 1) \Leftrightarrow \boxed{x + 2y = 1.}$$

EXEMPLO 2.2.8 (Distância de Ponto à Reta) *No plano xy fixemos a reta $r : ax + by + c = 0$ e o ponto $A\,(x_A, y_A)$. Vamos deduzir a seguinte fórmula para a distância do ponto A à reta r :*

$$\boxed{dist(A; r) = \frac{|a \cdot x_A + b \cdot y_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.} \tag{2.7}$$

Solução: Primeiro encontramos a reta s que passa no ponto A e é ortogonal à reta r; em seguida determinamos o ponto $B\,(x_B, y_B)$ de interseção das retas r e s. A distância do ponto A à reta r é, por definição, o comprimento do segmento AB. As declividades das retas r e s são, respectivamente, $m_r = -a/b$ e $m_s = b/a$, sendo s descrita pela equação:

$$s : y = y_A + \frac{b}{a}\,(x - x_A)\,.$$

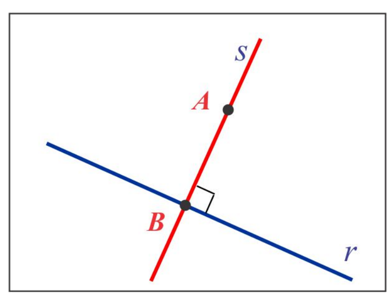


Figura 2.11: dist(A; r)

Considerando que o ponto B é a interseção das retas r e s, temos que:

$$y_B = y_A + \frac{b}{a}\,(x_B - x_A) \quad \text{e} \quad ax_B + by_B + c = 0$$

e por substituição, encontramos:

$$ax_B + b\left[y_A + \frac{b}{a}(x_B - x_A)\right] + c = 0$$

e após as simplificações, chegamos à equação:

$$\frac{a^2+b^2}{a}(x_B - x_A) = -(ax_A + by_A + c). \tag{2.8}$$

Ora, a distância do ponto A à reta r é:

$$\text{dist}(A,B)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}(x_B - x_A)^2$$

e usando (2.8) chegamos ao resultado (2.7).

EXEMPLO 2.2.9 *Calcular a altura do triângulo de vértices $A(0,-3)$, $B(-4,0)$ e $C(2,1)$, relativa ao lado BC.*

Solução: A reta r que passa nos pontos B e C é descrita pela equação: $r : x - 6y + 4 = 0$ e a distância do ponto A à reta r é:

$$h = \text{dist}(A;r) = \frac{|1\times 0 + (-6)\times(-3) + 4|}{\sqrt{1^2+6^2}} = \frac{22}{\sqrt{37}}.$$

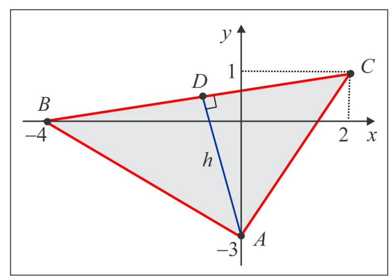


Figura 2.12: Altura $h = |AD|$

2.2.3 Simetria em Relação à Bissetriz

A reta $y = x$ que divide os quadrantes I e III em setores de 45°, recebe o nome de 1ª bissetriz; já a reta $y = -x$, que divide ao meio os quadrantes II e IV, é conhecida como 2ª bissetriz. Ao permutar as coordenadas de um ponto $P(a,b)$, obtemos um novo ponto $Q(b,a)$, o qual é o simétrico do ponto P em relação à 1ª bissetriz. Isto fica evidente a partir dos seguintes fatos:

(i) O segmento PQ tem declividade $m_{PQ} = -1$ e, portanto, é ortogonal à reta $y = x$.

(ii) O ponto médio M do segmento PQ jaz sobre a reta $y = x$ e, portanto, P e Q são equidistantes da reta bissetriz $y = x$.

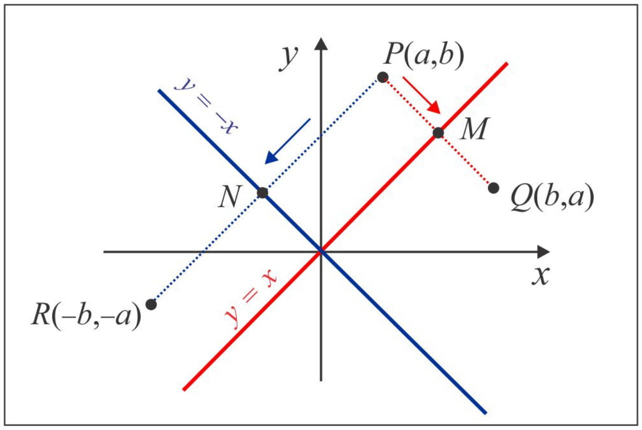


Figura 2.13: Reflexão na Bissetriz.

(iii) Usando um argumento similar, concluímos que o ponto $R(-b,-a)$ é o simétrico do ponto $P(a,b)$ em relação à 2ª bissetriz $y=-x$.

► ESCREVENDO PARA APRENDER 2.2

1. Em cada caso, determine a declividade da reta que passa nos pontos A e B.

   (a) $A(-2,1)$ e $B(2,3)$ **(b)** $A(2,1)$ e $B(-2,-1)$.

2. Esboce o grafico das retas sugeridas, identificando os pontos de interseção com os eixos Ox e Oy.

   (a) $3x-4y+6=0$ **(b)** $y=-2x+4$ **(c)** $2x=-y+1$.

3. Em cada caso, descreva a reta nas formas paramétrica e simétrica.

   (a) $2x+3y=6$ **(b)** $-3x+2y-5=0$ **(c)** $y-2x=4$.

4. Determine a equação da reta r que passa no ponto $A(1,2)$ e é ortogonal à reta $x+y=2$.

5. Calcule a distância do ponto $A(2,3)$ à reta $r: y=2x-5$.

6. Determine a equação da reta r que passa no ponto médio e é perpendicular ao segmento de extremidades $A(1,1)$ e $B(-2,3)$. Faça uma ilustração gráfica.

7. Encontre o quarto vértice de um paralelogramo, sabendo que três vértices consecutivos são: $A(-2,-1)$, $B(2,3)$ e $C(-1,4)$.

8. Mostre que a reta s que passa no ponto $A(x_0,y_0)$ e é paralela à reta $r: ax+by+c=0$ tem equação $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$. Agora, escreva a equação da reta que passa no ponto $A(1,5)$ e é paralela à reta $x+y=4$.

9. Mostre que o triângulo de vértices $A(1,-2)$, $B(-4,2)$ e $C(1,6)$ é isóceles.

10. Um dos lados de um quadrado jaz na reta $r: x-2y+7=0$ e um de seus vértices é o ponto $A(2,-5)$. Calcue a área do quadrado.

11. Encontre o ponto da reta $r: 2x-3y+6=0$ equidistante dos pontos $A(0,-2)$ e $B(-4,0)$.

12. Calcule a distância entre as retas paralelas $r: x+y=4$ e $s: y=-x+3$.

13. Qual valor de b faz com que a distância do ponto $A(-1,b)$ à reta $r: x+2y=4$ seja igual a 3?

14. Identifique o conjunto dos pontos do plano xy equidistantes dos pontoa $A(1,2)$ e $B(-1,3)$.

15. Determine o *Baricentro* do triângulo de vértices $A(-1,0)$, $B(0,2)$ e $C(-2,-2)$.

2.3 A Circunferência

Em geometria existem duas questões fundamentais:

(i) Dada uma equação em duas variáveis

$$F(x,y)=0, \tag{2.9}$$

determinar sua interpretação ou representação gráfica.

(ii) Dada uma figura (condição geométrica), determinar sua equação ou representação analítica.

A totalidade dos pontos $P(x,y)$ do plano xy que satisfazem a equação (2.9) leva o nome de *Lugar Geométrico* da equação.

Uma *Circunferência* no plano xy é o *lugar geométrico* constituído dos pontos $P(x, y)$, cuja distância a um ponto fixo, denominado *centro* da circunferência, é constante. Essa constante recebe o nome de *raio* da circunferência.

Na dedução da equação reduzida, vamos adotar para centro o ponto $C(x_0, y_0)$ e representar por R o raio da circunferência. Se $P(x, y)$ é um ponto genérico da curva, a equação que traduz o conceito é:

$$\boxed{\text{dist}(P; C) = R} \tag{2.10}$$

e, em coordenadas, a equação (2.10) assume a forma:

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.} \tag{2.11}$$

A Figura 2.14 ilustra graficamente a circunferência de centro $C(x_0, y_0)$, governada pela equação (2.11).

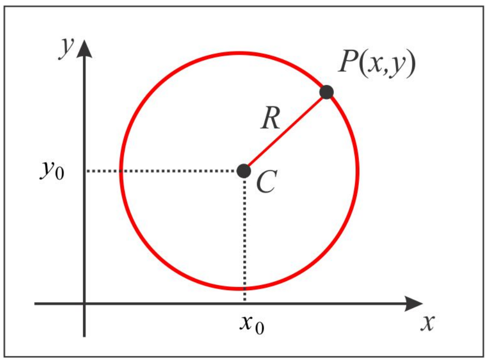


Figura 2.14: Circunferência $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

EXEMPLO 2.3.1 *A circunferência de raio* $R = 5$ *e centro* $C(-2, 1)$ *é descrita pela equação*:

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25 \quad ou \quad x^2 + y^2 + 4x - 2y = 20.$$

EXEMPLO 2.3.2 *Encontrar o centro e o raio da circunferência descrita pela equação*:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0. \tag{2.12}$$

Solução: *Observe que a equação não está na forma reduzida e é necessário ajustá-la usando o processo de completar quadrados, que tem sua origem nos produtos notáveis. Veja como transformar a expressão*

$x^2 \pm 2ax$ *em produtos notáveis*:

$$\boxed{x^2 \pm 2ax = x^2 \pm 2ax + a^2 - a^2 = (x \pm a)^2 - a^2.} \tag{2.13}$$

Assim, temos:

(i) $x^2 - 2x = x^2 - 2 \times 1 \times x = (x-1)^2 - 1, \qquad (a = 1)$

(ii) $x^2 + 4x = x^2 + 2 \times 2 \times x = (x+2)^2 - 4, \qquad (a = 2)$

e a equação da circunferência (2.12), com o completamento dos quadrados, se escreve sob a forma reduzida:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - 1 - 4 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4,$$

Comparando com (2.11), vemos que a circunferência tem centro no ponto $C(1, -2)$ e raio $R = 2$.

OBSERVAÇÃO 2.3.3 *Qualquer circunferência do plano xy pode ser descrita por uma equação geral do 2^o grau em x e y, da forma:*

$$\boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.} \tag{2.14}$$

Ressaltamos, contudo, que nem toda equação do tipo (2.14) representa uma circunferência. De fato:

(i) *A equação $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$ é do tipo (2.14), com $a = -4$, $b = -2$ e $c = 5$ e representa o ponto $C(2, 1)$, já que a equação é equivalente a $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 0$ (uma soma de quadrados é zero se, e somente se, cada parcela é igual a zero).*

(ii) *Já a equação $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 15 = 0$ é equivalente a $(x+3)^2 + (y-1)^2 = -5$, a qual não tem solução e, portanto, não representa lugar geométrico algum do plano xy.*

EXEMPLO 2.3.4 (parametrizando a circunferência) *Se na circunferência da Figura 2.14 o parâmetro t representa o ângulo entre o raio CP e o eixo Ox, então a circunferência $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ é parametrizada da seguinte forma*:

$$\left| \begin{array}{l} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t < 2\pi. \end{array} \right. \tag{2.15}$$

EXEMPLO 2.3.5 (Reta Tangente) *Encontrar a reta tangente à circunferência $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$, no ponto $A(3/2, -2 + \sqrt{3}/2)$.*

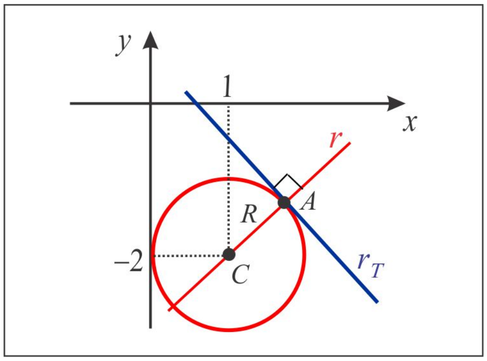


Figura 2.15: Reta Tangente.

Solução: A Figura 2.15 abaixo ilustra a situação geométrica e o raciocínio por trás do método é a ortogonalidade entre a reta tangente r_T e o raio da circunferência que passa no ponto de tangência.
A reta r que passa no centro C e no ponto de tangência A tem declividade $m_r = \sqrt{3}$ e a reta tangente, por ser ortogonal à reta r, tem declividade $m_T = -1/\sqrt{3}$ e é descrita por:

$$y = -2 + \sqrt{3}/2 + (-1/\sqrt{3})(x - 3/2) \Leftrightarrow y = -x/\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}.$$

A reta tangente é: $\boxed{r_T:\ x + \sqrt{3}y = 3 - 2\sqrt{3}.}$

► ESCREVENDO PARA APRENDER 2.3

1. Em cada caso, obtenha a equação e esboce o gráfico da circunferência.

   (a) Centro $C(-2,1)$ e raio $r = 5$.

   (b) Passa pelos pontos $A(5,1)$, $B(4,2)$ e $C(-2,2)$.

   (c) O centro está sobre a reta $y = x - 1$ e corta o eixo x nos pontos $A(-1,0)$ e $B(3,0)$.

   (d) Passa pelos pontos $A(1,2)$ e $B(1,-2)$ e tem raio $r = 2$.

   (e) Circunscrita ao triângulo formado pelas retas $x + y = 8$, $2x + y = 14$ e $3x + y = 22$.

   (f) Um diâmetro é o segmento que une os pontos $A(0,-1)$ e $B(-2,-3)$.

2. Determine a equação da circunferência de raio 5, tangente à reta $3x + 4y = 16$ no ponto $A(4,1)$.

3. Quais os pontos de interseção da reta $r: x - \sqrt{3}y + 4 = 0$ com a circunferência $x^2 + y^2 = 16$?

4. Quais retas, de declividade $m = 2$, são tangentes $x^2 + y^2 = 5$. Faça uma ilustração gráfica.

5. Determine a equação da circunferência de centro $C(1, 2)$ e tangente à reta $r : x - 2y + 8 = 0$.

6. Calcule o comprimento da corda da circunferência $x^2+y^2 = 25$ que jaz sobre a reta $x-7y+25 = 0$.

7. Verifique se a equação sugerida representa ou não uma circunferência. Em caso afirmativo, encontre o centro e o raio.

   (a) $9x^2 + 9y^2 + 6x - 36y + 64 = 0$.

   (b) $4\left(x^2 + y^2\right) = 27 - 4x$.

8. Determine a equação da circunferência inscrita no triângulo determinado pelas retas:

$$r_1 : 4x - 3y = 65, \quad r_2 : 7x - 24y + 55 = 0 \quad \text{e} \quad r_3 : 3x + 4y = 5.$$

9. Uma haste de $30cm$ move-se com seus extremos apoiados em dois fios perpendiculares. Identifique o lugar geométrico descrito pelo ponto médio da haste.

10. Determine o centro e o raio da circunferência descrita na forma paramétrica por

$$\left|\begin{array}{l} x = 2 + 3\cos t \\ y = -1 + 3\,\mathrm{sen}\, t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{array}\right.$$

2.4 A Parábola

Em geometria analítica, a curva obtida como interseção de um *cone* com um *plano* recebe o nome de *Cônica*. Além da circunferência, existem três outras cônicas que merecem nossa atenção: Parábola, Hipérbole e Elipse.

Iniciamos com a parábola de equação $y = ax^2,\ a \neq 0$, cujo gráfico é tangente ao eixo Ox na origem. A concavidade do gráfico (para cima ou para baixo) depende do sinal do coeficiente a, como ilustram as Figuras 2.16 e 2.17. No caso $a > 0$, temos $y = ax^2 \geq 0, \ \forall\, x$, e a origem é um ponto de mínimo do gráfico, enquanto no caso $a < 0$ ocorre $y = ax^2 \leq 0, \ \forall\, x$, e a origem é um ponto de máximo do gráfico.

O caso geral $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, será reduzido ao caso apresentado por meio de uma simples translação. Vejamos um exemplo como modelo.

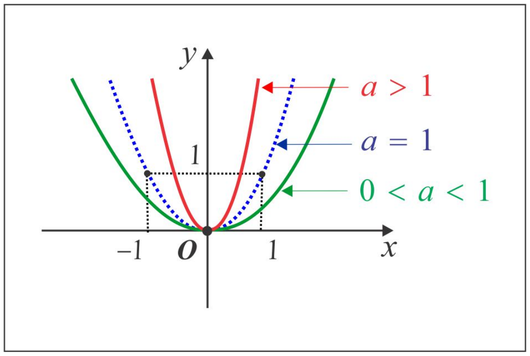


Figura 2.16: $y = ax^2,\ a > 0$

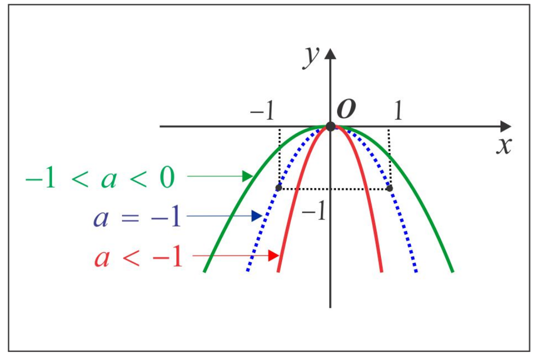


Figura 2.17: $y = ax^2,\ a < 0$

EXEMPLO 2.4.1 *Esboçar o gráfico da parábola descrita pela equação:* $y = 2x^2 - 4x + 4.$

Solução: Efetuando o completamento do quadrado, obtemos a equação:

$$y = 2(x-1)^2 + 2$$

e por meio da mudança $\overline{x} = x - 1$ e $\overline{y} = y - 2$ chegamos à equação reduzida: $\bar{y} = 2\bar{x}^2$. O ponto de mínimo do gráfico é a nova origem $\overline{O}(1,2)$ e para dar maior fidelidade ao gráfico (Figura 2.18), é aconselhável determinar as interseções, caso existam, com os eixos Ox e Oy.

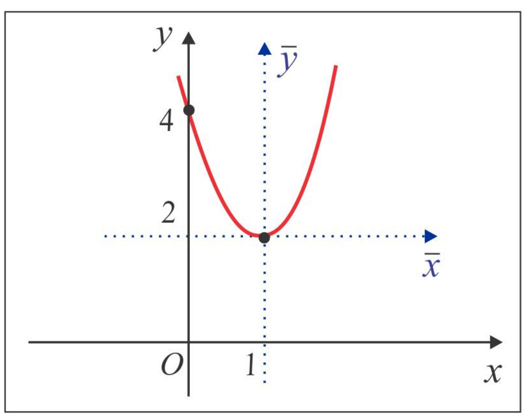


Figura 2.18: Parábola $y = 2x^2 - 4x + 4$.

(i) Interseção com o eixo Oy : Considerando na equação original $x = 0$ (recorde-se que nos pontos do eixo Oy tem-se $x = 0$), encontramos $y = 4$ e a interseção com o eixo Oy é o ponto $A(0, 4)$.

(ii) Interseção com o eixo Ox : Fazendo $y = 0$ na equação original (recorde-se que nos pontos do eixo Ox tem-se $y = 0$), chegamos à equação do 2º grau $2x^2 - 4x + 4 = 0$, sem raiz, já que o discriminante é $\Delta = -16 < 0$. Portanto, o gráfico não toca o eixo Ox.

EXEMPLO 2.4.2 *No caso geral da parábola* $y = ax^2 + bx + c$*, imitando o que foi feito no Exemplo* (2.4.1)*, encontramos*:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \tag{2.16}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$ *é o discriminante. Se fizermos* $x = -b/2a$ *em* (2.16)*, obtemos* $y = -\Delta/4a$ *e o ponto extremo* (*máximo ou mínimo*) $V(-b/2a, -\Delta/4a)$ *é o vértice da parábola* (*nova origem*).

EXEMPLO 2.4.3 (Rotação da Parábola) *A equação* $x = ay^2$, $a \neq 0$, *também representa parábolas. Houve uma permuta entre as variáveis* x *e* y *e, graficamente, essa permuta corresponde a uma rotação de* 90^o ($\pi/2$ rad) *no sistema de coordenadas. A Figura* 2.19 *ilustra os gráficos, nos casos* $a = \pm 1$.

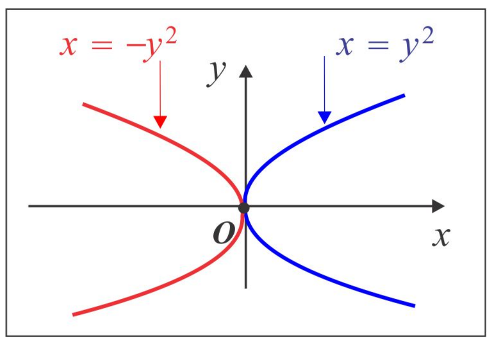


Figura 2.19: Parábolas $x = \pm y^2$.

2.4.1 O Foco e a Diretriz da Parábola

Fixemos no plano xy um ponto F e uma reta r. Denomina-se Parábola de *foco* F e *diretriz* r ao lugar geométrico constituído dos pontos $P(x, y)$ equidistantes do ponto F e da reta r, isto é:

$$\operatorname{dist}(F, P) = \operatorname{dist}(P; r). \tag{2.17}$$

A reta que passa no foco e é perpendicular à diretriz recebe o nome de *Eixo Focal.* A partir da equação geral (2.17) vamos encontrar a equação cartesiana da parábola, em alguns casos especiais. Para isto, fixemos um parâmetro real $p > 0$.

PROTÓTIPO I: O foco é o ponto $F(p, 0)$ e a diretriz é a reta $x = -p$, ortogonal ao eixo Ox.

Na Figura 2.20 ilustramos a situação, onde destacamos os pontos:

(i) $F(p, 0)$ e $P(x, y)$ respectivamente, o foco e um ponto genérico da parábola.

(ii) $Q(-p, y)$ o pé da perpendicular baixada do ponto P à diretriz.

(iii) $D(-p, 0)$ o ponto de interseção do eixo da parábola (eixo Ox) com a diretriz.

O vértice da parábola é o ponto médio do segmento DF que, neste caso, coincide com a origem. Notando que $\operatorname{dist}(P; r) = \operatorname{dist}(P, Q)$, obtemos a partir de (2.17):

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \sqrt{(x+p)^2} \Leftrightarrow \boxed{y^2 = 4px}$$

que representa a equação cartesiana da parábola.

PROTÓTIPO II: O foco é o ponto $F(-p, 0)$ e a diretriz é a reta $x = p$, ortogonal ao eixo Ox, como ilustrado na Figura 2.21. Neste caso, destacamos $Q(p, y)$ e $D(p, 0)$ e, mais uma vez, o vértice é a origem e a equação (2.17) se reduz a:

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(y+p)^2} \Leftrightarrow \boxed{x^2 = 4py.}$$

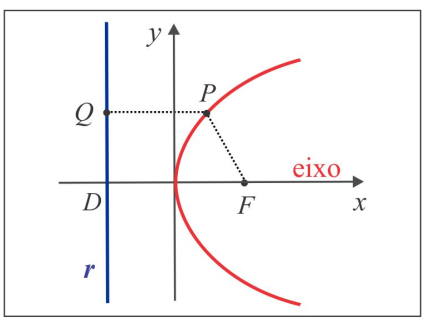


Figura 2.20: $y^2 = 4px, \ p > 0$

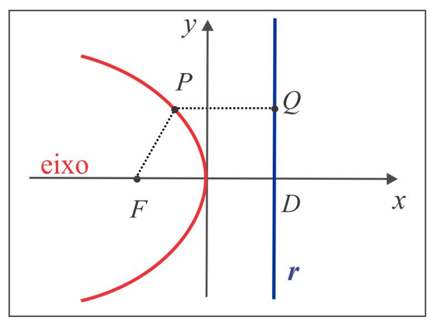


Figura 2.21: $y^2 = -4px, \ p > 0$

Nas Figuras 2.22 e 2.23 ilustramos as variantes dos casos (I) e (II), onde trocamos x por y.

PROTÓTIPO III: Foco $F(0, p)$ e diretriz $y = -p$. Neste caso a parábola é descrita por: $\boxed{y^2 = -4px.}$

PROTÓTIPO IV: Foco $F(0, -p)$ e diretriz $y = p$. Neste caso a parábola é descrita por: $\boxed{x^2 = -4py.}$

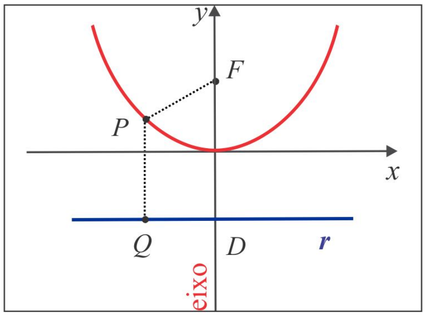


Figura 2.22: $x^2 = 4py,\ p > 0$

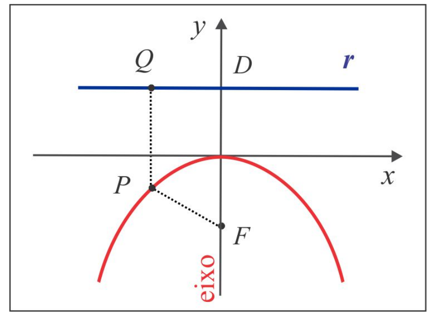


Figura 2.23: $x^2 = -4py,\ p > 0$

EXEMPLO 2.4.4 *A parábola* $y^2 = x$ *tem foco no ponto* $F(1/4, 0)$, *como se vê a partir da equação padrão* $y^2 = 4(1/4)x$. *O vértice está na origem e a diretriz é a reta vertical* $y = -1/4$.

EXEMPLO 2.4.5 *Encontrar o foco e a diretriz da parábola:* $y = 2x^2 - 4x + 4$.

Solução: Vamos enquadrar a parábola em um dos modelos apresentados. Temos:

$$y - 2 = 2(x-1)^2 \Leftrightarrow \overline{y} = 2\overline{x}^2 \quad \text{ou} \quad \boxed{\overline{x}^2 = 4(1/8)\overline{y}}$$

Vemos que a parábola é do tipo II, com $p = 1/8$ e assim, no sistema $\overline{x}\ \overline{y}$, a parábola tem foco $\overline{F}(0, 1/8)$ e ditretriz $\overline{y} = -1/8$. Notando que $y = \overline{y} + 2$ e $x = \overline{x} + 1$, deduzimos que no sistema original xy, a parábola tem foco $F(1, 17/8)$ e diretriz $y = -17/8$.

EXEMPLO 2.4.6 (A diretriz não é horizontal nem vertical) *Determinar a equação da parábola com foco* $F(0,0)$ *e diretriz* $r : x + y = 2$. *Qual o vértice da parábola?*

Solução: Na Figura 2.24 ilustramos a situação gráfica
e vemos que se $P(x, y)$ é um ponto da parábola, usando a fórmula da distância (2.7) e o conceito (2.17), obtemos:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{|x + y - 2|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{(x + y - 2)^2}{2} \Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 4y = 4.}$$

O eixo da parábola é a reta $y = x$, que intercepta a diretriz $x + y = 2$ no ponto $D(1, 1)$ e como o vértice o ponto médio do segmento DF, segue que $V(1/2, 1/2)$.

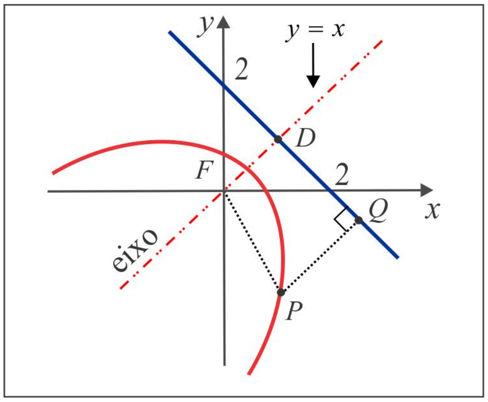


Figura 2.24: Parábola do Exemplo 2.4.6

► **ESCREVENDO PARA APRENDER 2.4**

1. Encontre a equação, os elementos principais (*foco*, *vértice*, *eixo e diretriz*) e esboce o gráfico da parábola caracterizada por:

   (a) Foco $F(3,0)$ e diretriz $r: x+3=0$.

   (b) Foco $F(0,-2)$ e diretriz $r: y=2$.

   (c) Foco $F(-2,0)$ e diretriz $r: x=4$.

   (d) Foco $F(-4,1)$ e diretriz $r: y=3$.

   (e) Vértice $V(2,0)$ e foco $F(0,0)$.

   (f) Vértice $V(4,-1)$, eixo focal $r: y=-1$ e passa no ponto $P(3,-3)$.

   (g) Foco $F(0,0)$ e diretriz $r: x+y=2$.

   (h) Vértice $V(-2,3)$ e foco $F(1,3)$.

   (i) Eixo paralelo ao eixo y e passa nos pontos $A(4,5)$, $B(-2,11)$ e $C(-4,21)$.

   (j) Vértice na reta $2y-3x=0$, eixo paralelo ao eixo x e passa nos pontos $A(3,5)$ e $B(6,-1)$.

2. Mostre que a circunferência com centro no ponto $C(4,-1)$ e que passa no foco da parábola $x^2+16y=0$ é tangente à diretriz da parábola.

3. Identifique a trajetória de uma partícula em movimento, em que a distância da partícula à reta $r : x + 3 = 0$ é sempre duas unidades maior que sua distância ao ponto $(1, 1)$.

2.5 A Elipse

Antes de formalizar o conceito de elipse como lugar geométrico, faremos uma interpretação da equação modelo:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0.} \tag{2.18}$$

Seja $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ e consideremos os pontos $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$. Se as coordenadas x e y de um ponto móvel $P(x, y)$ satisfazem à equação (2.18), vamos mostrar que a quantidade:

$$\text{dist}(F_1, P) + \text{dist}(F_2, P)$$

é sempre constante e igual a $2a$. De fato, de (2.18) temos:

$$\begin{aligned} b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \Leftrightarrow \left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \\ &\Leftrightarrow a^2x^2 + a^2c^2 + 2a^2cx + a^2y^2 = 2a^2cx + a^4 + c^2x^2 \\ &\Leftrightarrow a^2\left[(x + c)^2 + y^2\right] = \left(a^2 + cx\right)^2, \end{aligned}$$

e da última igualdade, resulta:

$$a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a^2 + cx. \tag{2.19}$$

Procedendo de forma similar, substituindo $2a^2cx$ por $-2a^2cx$, encontramos:

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx \tag{2.20}$$

e adicionando membro a membro as equações (2.19) e (2.20), obtemos:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a \Leftrightarrow \boxed{\text{dist}(F_1, P) + \text{dist}(F_2, P) = 2a.}$$

2.5.1 Conceito & Equação Reduzida

Uma *Elipse* no plano xy é o lugar geométrico constituído dos pontos $P(x,y)$, cuja soma das distâncias a dois ponto fixos F_1 e F_2, denominados *Focos* da elipse, é constante. Os raios F_1P e F_2P são os *Raios Focais* do ponto P e o ponto médio dos focos é o *Centro* da elipse. A distância entre os focos recebe o nome de *Distância Focal* da elipse.

Na dedução da *Equação Reduzida* vamos considerar duas situações dentro do mesmo modelo padrão.

■ SITUAÇÃO 1 Nesta primeira situação, vamos considerar os focos $F_1(c,0)$ e $F_2(-c,0)$ sobre o eixo Ox e admitir que a soma dos raios focais seja igual $2a$, isto é:

$$\boxed{\operatorname{dist}(F_1,P)+\operatorname{dist}(F_2,P)=2a.} \tag{2.21}$$

Com esses dados, mostraremos que a elipse é descrita pela equação (2.18). Inicialmente, notamos que:

$$2c=\operatorname{dist}(F_1,F_2)\le \operatorname{dist}(F_1,P)+\operatorname{dist}(F_1,P)=2a,$$

como consequência da desigualdade triangular, de onde resulta que $c\le a$. A partir da equação (2.21) que traduz o conceito, obtemos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(F_1,P)+\operatorname{dist}(F_2,P) &= 2a\\
&\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a\\
&\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\\
&\Leftrightarrow \left(cx+a^2\right)^2=a^2\left[(x+c)^2+y^2\right]\\
&\Leftrightarrow (x-c)^2+y^2=\left(2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2\\
&\Leftrightarrow \left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right).
\end{aligned}$$

Se fizermos $b^2=a^2-c^2$, obteremos da última igualdade a equação reduzida:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.} \tag{2.22}$$

■ SITUAÇÃO 2 Agora, suponhamos que os focos sejam os pontos $F_1(0,c)$ e $F_2(0,-c)$ do eixo Oy, e que a soma dos raios focais seja $2a$. Procedendo como no primeiro caso, considerando $b^2=a^2-c^2$, obtemos a equação reduzida:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.} \tag{2.23}$$

2.5.2 Gráficos & Elementos Principais

No traçado do gráfico devemos observar alguns ítens e como referência vamos adotar a elipse (2.22).

▸ **SIMETRIA** Se em (2.22) trocarmos x por $-x$ ou y por $-y$ a equação permanece inalterada. Graficamente isto significa que a elipse é simétrica em relação aos eixos coordenados e em relação à origem.

▸ **INTERSEÇÃO COM OS EIXOS**

(a) A interseção com o eixo Ox é determinada considerando $y = 0$ na equação. Encontramos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \pm a$$

e assim, a elipse intercepta o eixo Ox nos pontos: $A_1(a, 0)$ e $A_2(-a, 0)$.

(b) De modo similar, considerando $x = 0$, obtemos:

$$\frac{0^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = b^2 \Leftrightarrow y = \pm b.$$

Assim, a elipse toca o eixo Oy nos pontos $B_1(0, b)$ e $B_2(0, -b)$.

▸ **POSIÇÃO DA ELIPSE** A posição da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ é determinada comparando-se os denominadores dos termos x^2 e y^2. O maior denominador é associado à variável correspondente ao eixo sobre o qual estão os focos. (veja as Figuras 2.25 e 2.26)

▸ **ELEMENTOS PRINCIPAIS** Em uma elipse, os seguintes elementos devem ser destacados:

(1) Os Focos: $F(\pm c, 0)$ ou $F(0, \pm c)$.

(2) O Centro: ponto médio dos focos: $C(0, 0)$.

(3) Os Vértices: $A_1(a, 0)$ e $A_2(-a, 0)$; $B_1(0, b)$ e $B_2(0, -b)$.

(4) Eixo maior: A_1A_2 de comprimento $2a$, onde estão localizados os Focos.

(5) Eixo menor: B_1B_2 de comprimento $2b$.

(6) O Eixo Focal: reta que contém os focos.

(7) Os Raios Focais do ponto $P(x, y)$: os segmentos de reta F_1P e F_2P.

(8) A Excentricidade: $e = c/a$, no caso $a > b$, ou $e = c/b$, no caso $b > a$. Observamos que $0 < e < 1$ e a excentricidade mede o *achatamento* da cônica. De fato:

(i) $e \simeq 1 \Leftrightarrow c \simeq a \Leftrightarrow b \simeq 0$ (elipse é mais *achatada*).

(ii) $e \simeq 0 \Leftrightarrow c \simeq 0 \Leftrightarrow b \simeq a$ (elipse é menos *achatada*). Uma circunferência é uma elipse de excentricidade $e = 0$.

▸ GRÁFICOS As Figuras 2.25 e 2.26 abaixo ilustram os gráficos das elipses nas duas situações.

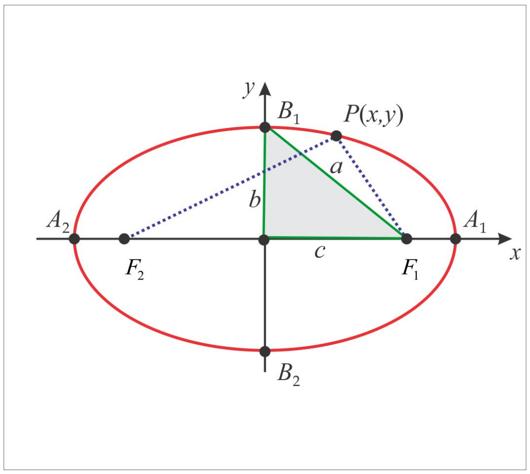


Figura 2.25: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \ a > b > 0$

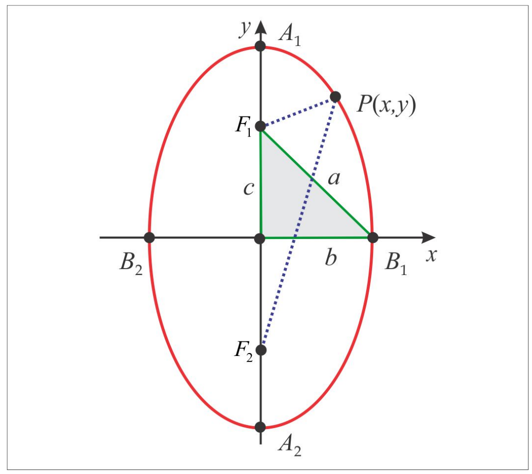


Figura 2.26: $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1, \ a > b > 0$

2.5.3 Translação da Elipse

No caso em que o centro da elipse é o ponto $C(x_0, y_0)$, são necessárias algumas atualizações na equação e nos elementos principais da cônica. Após a translação $\overline{x} = x - x_0$ e $\overline{y} = y - y_0$, a equação assume a forma:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1} \tag{2.24}$$

e as coordenadas dos focos e dos vértices também sofrem alterações. Imaginemos $a > b$, de modo que os focos estarão sobre a reta horizontal $y = y_0$, paralela ao eixo Ox.Temos:

Focos: $F(x_0 \pm c, y_0)$

Vértices: $A(x_0 \pm a, y_0)$ e $B(x_0, y_0 \pm b)$.

No caso em que $a < b$, e isto indica que o eixo focal é a reta vertical $x = x_0$, teremos:

$$\begin{array}{ll} \text{Focos:} & F(x_0, y_0 \pm c) \\ \text{Vértices:} & A(x_0 \pm a, y_0) \quad \text{e} \quad B(x_0, y_0 \pm b)\,. \end{array}$$

EXEMPLO 2.5.1 *Suponhamos que certa elipse tenha centro $C(1,2)$ e que seus focos estejam sobre a reta $x = 1$, distantes 4 unidades um do outro. Temos que $2c = 4$, de modo que $c = 2$ e considerando que $x_0 = 1$ e $y_0 = 2$, deduzimos que os focos são $F_1(1,4)$ e $F_2(1,0)$ e a equação é da forma:*

$$\boxed{\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1, \quad b > a.}$$

Se, por exemplo, a cônica tem um vértice no ponto $A_1(3,2)$, então $a = 2$ e da relação $b^2 = a^2 + c^2$, deduzimos que $b^2 = 8$. A equação da elipse é, portanto:

$$\boxed{\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{8} = 1.}$$

Os outros vértices são: $A_2(-1,2)$, $B_1(1, 2+\sqrt{8})$ e $B_2(1, 2-\sqrt{8})$

► **ESCREVENDO PARA APRENDER 2.5**

1. Encontre a equação, os elementos principais (*focos*, *vértices*, *excentricidade*, *centro* e *eixos*) e esboce o gráfico da elipse caracterizada por:

   (a) Focos $F_1(3,0)$, $F_2(-3,0)$ e soma dos raios focais igual a 12.

   (b) Dois vértices em $B_1(3,-4)$ e $B_2(3,4)$ e distância focal igual a 4.

   (c) Vértices em $A_1(-5,0)$, $A_2(5,0)$, $B_1(0,-4)$ e $B_2(0,4)$.

   (d) Focos sobre o eixo y, distância focal igual a 8 e excentricidade $e = 2/3$.

   (e) Centro $C(2,-1)$ e passa nos pontos $A(-3,-1)$ e $B(2,3)$.

   (f) Focos $F_1(-2,-2)$, $F_2(2,2)$ e soma dos raios focais igual a 12.

2. Determine a equação e a excentricidade da elipse que tem seu centro na origem, um dos vértices no ponto $B_1(0,-7)$ e passa no ponto $A(\sqrt{5}, 14/3)$.

3. Determine as retas tangentes à elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ com declividade $m = 1$.

4. Um arco tem a forma de uma semi-elipse com 48 metros de largura na base e 20 metros de altura. Determine o comprimento de uma viga colocada a 10 metros da base, paralelamente a mesma.

5. O teto de um corredor de 20 m de largura tem a forma de uma semi-elipse e a altura no centro é 18 m. Se a altura das paredes laterais é 12 m, qual a altura do teto a 4 m de uma das paredes?

6. Identifique o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ cuja soma das distâncias aos pontos $F_1(4, -1)$ e $F_2(4, 7)$ é igual a 12.

7. Determine a equação da elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados e que passa nos pontos $A(-6, 4)$, $B(-8, 1)$, $C(2, -4)$ e $D(8, -3)$.

8. Determine o centro e os focos da elipse $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$.

9. Determine a interseção entre a elipse de vértices $(\pm 5, 0)$ e $(0, \pm 1)$ e a circunferência $x^2 + y^2 = 4$.

10. Determine os focos e o centro da elipse descrita pelo par de equações paramétricas

$$\left| \begin{array}{l} x = 3\cos t \\ y = 4 \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t < 2\pi. \end{array} \right.$$

2.6 A Hipérbole

Antes de formalizar o conceito de hipérbole como lugar geométrico, faremos uma interpretação da equação modelo:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a,\, b > 0.} \tag{2.25}$$

Inicialmente observamos que a variável x que figura na equação (2.25) não pode assumir valores entre $-a$ e a. De fato, se $|x| < a$, então $x^2 < a^2$ e teríamos:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} < 0,$$

que não possui solução real para y. Logo, devemos ter $|x| \geq a$, isto é, $x \geq a$ ou $x \leq -a$.

Seja $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ e consideremos os pontos $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$. Se as coordenadas x e y de um ponto móvel $P(x, y)$ satisfazem à equação (2.25) vamos mostrar que a quantidade:

$$|\text{dist}(F_1, P) - \text{dist}(F_2, P)|$$

é sempre constante e igual a $2a$.

(i) Se $x \geq a$, então $cx \geq a^2$, já que $c > a$, e de (2.25) temos:

$$\begin{aligned} b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 \Leftrightarrow \left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right) \\ &\Leftrightarrow -a^2x^2 - a^2c^2 + 2a^2cx - a^2y^2 = 2a^2cx - a^4 - c^2x^2 \\ &\Leftrightarrow a^2\left[(x - c)^2 + y^2\right] = \left(a^2 - cx\right)^2, \end{aligned}$$

e da última igualdade, resulta:

$$a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \left|a^2 - cx\right| = cx - a^2. \tag{2.26}$$

Procedendo de forma similar, substituindo $2a^2cx$ por $-2a^2cx$, encontramos:

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \left|a^2 + cx\right| = a^2 - cx \tag{2.27}$$

e subtraindo membro a membro as equações (2.26) e (2.27), obtemos:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = -2a. \tag{2.28}$$

(ii) Se $x \leq -a$, então $a^2 + cx \leq 0$ e, neste caso, encontramos:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a. \tag{2.29}$$

Combinando (2.28) e (2.29), obtemos: $\boxed{|\text{dist}(F_1, P) - \text{dist}(F_2, P)| = 2a.}$

2.6.1 Conceito & Equação Reduzida

Uma *Hipérbole* no plano xy é o lugar geométrico constituído dos pontos $P(x, y)$, cuja diferença das distâncias a dois ponto fixos F_1 e F_2, denominados *Focos* da hipérbole, é, em valor absoluto, constante.

Os raios F_1P e F_2P são os *Raios Focais* do ponto P e o ponto médio dos focos é o *Centro* da hipérbole. A distância entre os focos recebe o nome de *Distância Focal* da hipérbole.

Vamos deduzir a *Equação Reduzida* para dois modelos particulares.

■ **PROTÓTIPO I:** Neste primeiro modelo, vamos considerar os focos $F_1\,(c, 0)$ e $F_2\,(-c, 0)$ sobre o eixo Ox e admitir que a diferença dos raios focais seja, em valor absoluto, igual a $2a$, isto é:

$$|\text{dist}\,(F_1, P) - \text{dist}\,(F_2, P)| = 2a. \tag{2.30}$$

Da desigualdade triangular segue que $2c > 2a$ e de (2.30), resulta:

$$\begin{aligned}
|\text{dist}\,(F_1, P) - \text{dist}\,(F_2, P)| &= 2a \\
&\Leftrightarrow \text{dist}\,(F_1, P) - \text{dist}\,(F_2, P) = \pm 2a \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
&\Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \\
&\Leftrightarrow -cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
&\Leftrightarrow \left(cx + a^2\right)^2 = a^2\left[(x+c)^2 + y^2\right] \\
&\Leftrightarrow \left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right).
\end{aligned}$$

Se fizermos $b^2 = c^2 - a^2$, obteremos da última igualdade a equação reduzida:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.} \tag{2.31}$$

■ **PROTÓTIPO II:** Agora, vamos considerar os focos $F_1\,(0, c)$ e $F_2\,(0, -c)$, sobre o eixo Oy, e diferença dos raios focais, em valor absoluto, igual a $2b$, $0 < b < c$. Procedemos de forma similar ao caso anterior e encontramos a equação reduzida:

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,} \tag{2.32}$$

com $a^2 = c^2 - b^2$. Se mantivermos $|\text{dist}\,(F_1, P) - \text{dist}\,(F_2, P)| = 2a$, chegaremos à forma reduzida equivalente:

$$\boxed{-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2},} \tag{2.33}$$

2.6.2 Gráficos & Elementos Principais

Assim como ocorreu com a elipse, para o traçado do gráfico da hipérbole vamos observar algumas características da cônica.

▶ SIMETRIA O gráfico da hipérbole é simétrico em relação aos eixos Ox e Oy e também em relação à origem. A equação não é alterada por uma mudança no sinal das variáveis x ou y.

▶ INTERSEÇÃO COM OS EIXOS A hipérbole (2.31) não intercepta o eixo Oy, tendo em vista que:

$$x = 0 \Rightarrow -\frac{y^2}{b^2} = 1$$

e esta última equação não tem solução real para y. Já a hiperbole (2.32) não intercepta o eixo Ox, pois a substituição de y por 0 em (2.32) nos conduz à equação $-x^2/a^2 = 1$, sem solução real para x.

(a) A interseção da hipérbole (2.31) com o eixo Ox, é determinada considerando $y = 0$ na equação. Encontramos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \pm a$$

e, assim, a hipérbole intercepta o eixo Ox nos vértices: $A_1(a, 0)$ e $A_2(-a, 0)$.

(b) Já a hipérbole (2.32) intercepta o eixo Oy nos vértices $B_1(0, b)$ e $B_2(0, -b)$, determinados considerando $x = 0$ na equação:

$$-\frac{0^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = b^2 \Leftrightarrow y = \pm b.$$

▶ POSIÇÃO DA HIPÉRBOLE Em uma hipérbole pode ocorrer $a > b$, $a < b$ ou $a = b$ e a posição é determinada pelos sinais dos coeficientes nas variáveis x e y. A variável com sinal positivo corresponde ao eixo sobre o qual estão os focos. (veja as Figuras 2.27 e 2.28)

▶ ELEMENTOS PRINCIPAIS Em uma hipérbole, destacamos os seguintes elementos:

(a) Os Focos: $F(\pm c, 0)$, no caso (2.31), e $F(0, \pm c)$, no caso (2.32).

(b) O Centro: $C(0, 0)$, nos dois casos.

(c) Os Vértices: $A(\pm a, 0)$, no caso (2.31), e $B(0, \pm b)$, no caso (2.32).

(d) O Eixo Focal: A reta que contém os focos.

(e) O Eixo Transverso: a porção do Eixo Focal entre os vértices (o segmento A_1A_2 ou B_1B_2).

(f) O Eixo Conjugado: segmento B_1B_2 perpendicular ao Eixo Transverso, na hipérbole (2.31) e A_1A_2 na hipérbole (2.32).

(f) Os Raios Focais do ponto $P(x,y)$: F_1P e F_2P.

(g) A Excentricidade: $e = c/a$, no caso (2.31), e $e = c/b$, no caso (2.32). Temos $e > 1$ e a excentricidade mede o *achatamento* da cônica. No caso em que $e \approx 1$, a hipérbole degenera-se nas semiretas com origem nos focos.

▸ **COMPORTAMENTO NO INFINITO** Para maior clareza, vamos nos concentrar na hipérbole (2.31). Vejamos como se comporta o gráfico, à medida que a variável x aumenta ou diminui arbitrariamente (este comportamento do x é indicado simbolicamente por: $x \to +\infty$, no deslocamento para a direita, ou $x \to -\infty$, no deslocamento para a esquerda). Temos:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2 \le \frac{b^2}{a^2}x^2 \Rightarrow |y| \le \frac{b}{a}|x| \Leftrightarrow -\frac{b}{a}|x| \le y \le \frac{b}{a}|x|.$$

Isto nos diz que o gráfico da hipérbole jaz entre as retas $y = \pm(b/a)x$. Além disso, se $P(x,y)$, $y \ge 0$, é um ponto móvel sobre a hipérbole, se deslocando para direita ($x \to +\infty$) e r é a reta de equação $y = (b/a)x$, então de acordo com a fórmula (2.7), da distância de ponto à reta, temos:

$$\text{dist}(P;r) = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{c}\left|bx - b\sqrt{x^2-a^2}\right| = \frac{b}{c}\left|x - \sqrt{x^2-a^2}\right| = \frac{a^2b}{c}\left|\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right|. \qquad (2.34)$$

Um fato básico é que uma fração, com numerador constante, aproxima-se de zero à medida em que o denominador cresce arbitrariamente; com isto em mente, deduzimos a partir de (2.34) que a hipérbole aproxima-se da reta $y = (b/a)x$, quando $x \to +\infty$. Da mesma forma, quando $x \to -\infty$ a hipérbole aproxima-se da reta $y = -(b/a)x$. No caso em que $y < 0$ a hipérbole aproxima-se da reta $y = (b/a)x$, quando $x \to -\infty$, e da reta $y = -(b/a)x$, quando $x \to +\infty$. Por esta razão, as retas $y = \pm(b/a)x$ recebem o nome de *Assíntotas da Hipérbole*. No caso da hipérbole (2.32), as assíntotas são as retas $x = \pm(a/b)y$, o que nos dá $y = \pm(b/a)x$.

▸ **GRÁFICOS** As Figuras 2.27 e 2.28 abaixo ilustram os gráficos das hipérboles nas duas situações.

EXEMPLO 2.6.1 *Determinar a equação da hipérbole com focos $F_1(2,0)$ e $F_2(-2,0)$ e um vértice no ponto $A_1(1,0)$.*

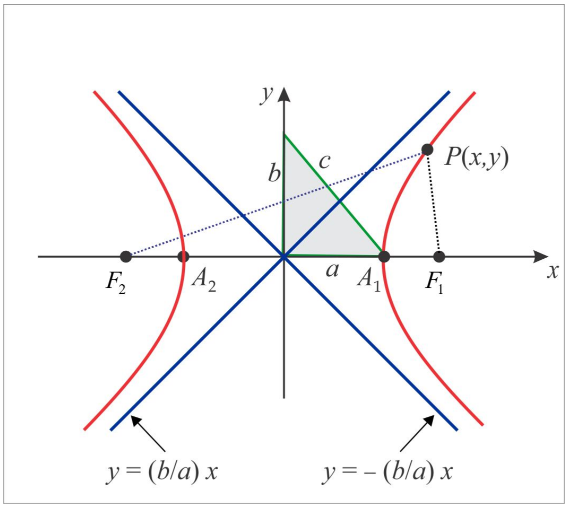


Figura 2.27: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

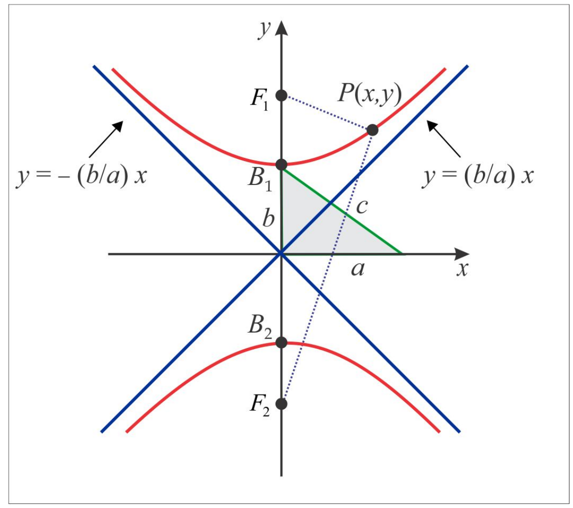


Figura 2.28: $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Solução: O centro da hipérbole é a origem e o eixo focal é o eixo Ox. Como $a = 1$ e $c = 2$, segue que $b^2 = c^2 - a^2 = 3$ e a equação da hipérbole é:

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

EXEMPLO 2.6.2 *Identificar a cônica descrita pela equação:*

$$-9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y = 29.$$

Solução: O primeiro passo é escrever a equação na forma padrão (I) ou (II). Efetuando o completamento dos quadrados, obtemos:

$$-9\,(x+1)^2 + 4\,(y-2)^2 = 36 \quad \text{ou} \quad -\frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$$

e a translação: $\overline{x} = x + 1$ e $\overline{y} = y - 2$, de centro $\overline{O}\,(-1, 2)$, nos remete ao padrão (II):

$$-\frac{\overline{x}^2}{a^2} + \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1$$

com $a = 2$ e $b = 3$, ilustrada no Figura 2.29.

Temos $c = \sqrt{13}$ e na tabela abaixo mostramos os elementos da hipérbole no sistema auxiliar $\overline{x}\,\overline{y}$ e no sistema original xy. A passagem de um sistema para o outro é por meio das equações de translação.

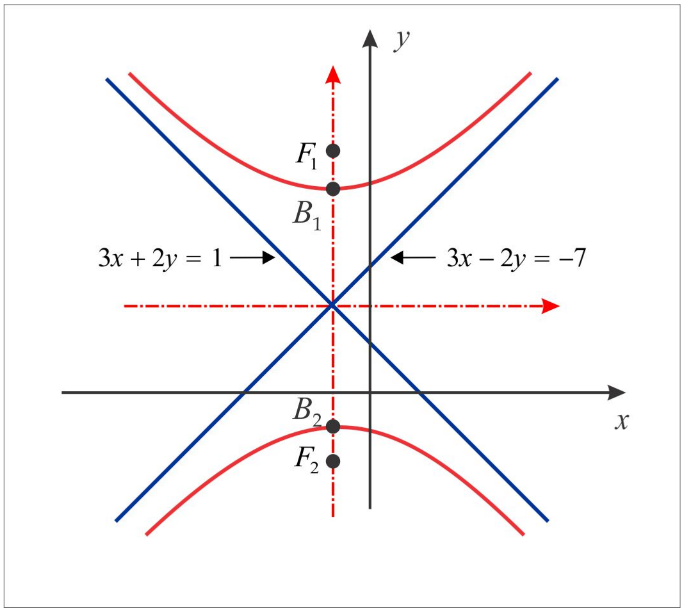


Figura 2.29: Hipérbole do Exemplo 2.6.2

Elementos	$(\overline{x},\overline{y})$	(x,y)
Centro	$(0,0)$	$(-1,2)$
Vértices	$(0,\pm 3)$	$B_1\,(-1,5)$ e $B_2\,(-1,-1)$
Focos	$\left(0,\pm\sqrt{13}\right)$	$F_1\left(-1,2+\sqrt{13}\right)$ e $F_2\left(-1,2-\sqrt{13}\right)$
Assíntotas	$\overline{y}=\pm\,(3/2)\,\overline{x}$	$3x-2y=-7$ e $3x+2y=1$
Eixo Focal	$\overline{x}=0$	$x=-1$

EXEMPLO 2.6.3 (hipérbole transladada) *O centro de uma hipérbole está no ponto $O\,(h,k)$ e a distância focal é igual a $2c$. Considerando o comprimento do eixo transverso igual a $2a$, há dois casos a considerar:*

(i) O eixo focal é paralelo ao eixo Ox e, neste caso, a equação da hipérbole é:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1,\quad b=\sqrt{c^2-a^2}.$$

(ii) O eixo focal é paralelo ao eixo Oy e, neste caso, a equação da hipérbole é:

$$-\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1,\quad b=\sqrt{c^2-a^2}.$$

(iii) As assíntotas são as retas:

$$\boxed{bx + ay = ak - bh} \quad \text{e} \quad \boxed{bx - ay = bh - ak},$$

obtidas de $\overline{y} = \pm (b/a)\,\overline{x}$, a partir da translação: $\overline{x} = x - h$ e $\overline{y} = y - k$.

▸ HIPÉRBOLES CONJUGADAS As hipérboles:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad \text{e} \quad \boxed{-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

em que o eixo transverso de uma coincide com o eixo conjugado da outra denominam-se *Hipérboles Conjugadas*. Elas possuem as mesmas assíntotas e na Figura 2.30 ilustramos duas hipérboles conjugadas, em que iniciamos a construção desenhando o retângulo de lados $2a$ e $2b$, cujas diagonais se encontram ao longo das assíntotas das hipérboles.

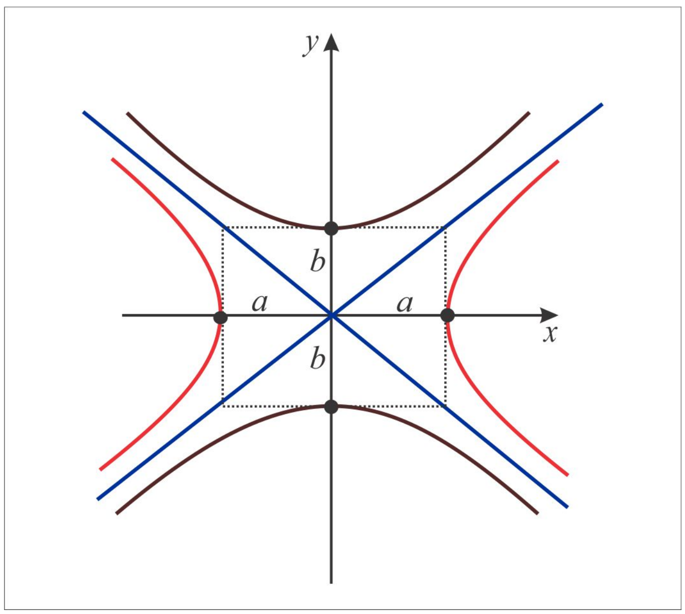


Figura 2.30: Hipérboles Conjugadas.

2.6.3 Hipérbole Equilátera

Nesta seção vamos considerar hipérboles descritas por uma equação do tipo:

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \text{ou} \quad -x^2 + y^2 = b^2, \tag{2.35}$$

inserida no Protótipo (I) ou (II), com $a = b$, e denominadas *Hipérboles Equiláteras*.

Como motivação, vamos considerar a hipérbole de focos $F_1(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $F_1(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e vértices $V_1\,(1,1)$ e $V_2\,(-1,-1)$, ilustrada na Figura 2.31, cujo eixo focal é a reta $y = x$ e eixo conjugado de comprimento $2a = 2\sqrt{2}$. A partir da definição obtemos, após as simplicações:

$$|\text{dist}\,(F_1, P) - \text{dist}\,(F_2, P)| = 2a \Leftrightarrow \boxed{xy = 1.}$$

A equação $xy = 1$ pode ser inserida no modelo (2.35) por meio da mudança de variável:

$$\left|\begin{array}{l} \overline{x} = \left(\sqrt{2}/2\right) x + \left(\sqrt{2}/2\right) y \\ \overline{y} = -\left(\sqrt{2}/2\right) x + \left(\sqrt{2}/2\right) y \end{array}\right. \tag{2.36}$$

De fato, resolvendo (2.36) encontramos: $x = \left(\sqrt{2}/2\right)\overline{x} - \left(\sqrt{2}/2\right)\overline{y}$ e $y = \left(\sqrt{2}/2\right)\overline{x} + \left(\sqrt{2}/2\right)\overline{y}$ e daí resulta:

$$xy = 1 \Leftrightarrow \left[\left(\sqrt{2}/2\right)\overline{x} - \left(\sqrt{2}/2\right)\overline{y}\right]\left[\left(\sqrt{2}/2\right)\overline{x} + \left(\sqrt{2}/2\right)\overline{y}\right] = 1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{\overline{x}^2}{2} - \frac{\overline{y}^2}{2} = 1.} \tag{2.37}$$

A última equação em (2.37) é do tipo (2.35), com $a = \sqrt{2}$, e a mudança de variável (2.36) corresponde a uma rotação do sistema xy de um ângulo de $\pi/4\,\text{rad}$ ou 45^{o}. Veja a Figura 2.31.

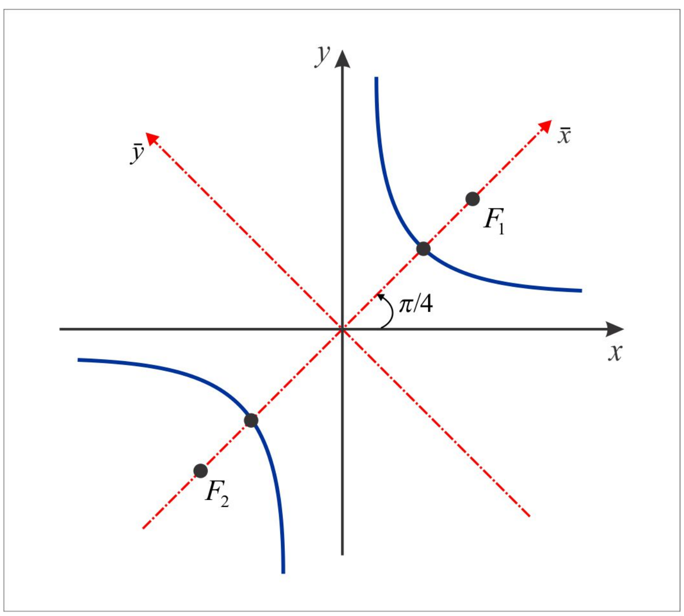


Figura 2.31: Hipérbole Equilátera $xy = 1$.

Considerando como motivação a hipérbole equilátera $xy = 1$, vamos estudar o lugar geométrico descrito pela equação:

$$\boxed{y = \frac{ax+b}{cx+d},} \tag{2.38}$$

sendo $a,\ b,\ c$ e d parâmetros constantes e $x \neq -d/c$. Faremos uma análise do comportamento da cônica a partir da noção intuitiva de limite. Adotaremos como modelo a equação

$$\boxed{y = \frac{k}{x}, \quad x \neq 0} \tag{2.39}$$

sendo k uma constante não nula. Há dois casos a considerar, dependendo do sinal da constante k.

CASO 1: $k > 0$

Neste caso, x e y têm mesmo sinal e isto indica que a hipérbole é constituída de um ramo no primeiro quadrante $(x > 0,\ y > 0)$ e outro no terceiro quadrante $(x < 0,\ y < 0)$. Para esboçar o gráfico com alguma precisão, é necessário estudar como se comporta a variável y, à medida que x se aproxima de zero (indicamos $x \to 0$), quando x cresce arbitrariamente, com valores positivos (indicamos $x \to +\infty$) e quando x decresce arbitrariamente, com valores negativos (indicamos $x \to -\infty$). A aproximção de x para zero pode ocorrer com valores positivos, isto é, pela direita $(x \to 0^+)$ ou pela esquerda, com valores negativos $(x \to 0^-)$.

Vejamos o comportamento de y (da fração k/x) em várias situações, levando em conta o sinal de x e da fração k/x, onde aproveitamos o momento para apresentar a notação simbólica para o limite.

(a) Como $x \neq 0$ e $y \neq 0$, deduzimos que o gráfico da hipérbole $y = k/x$ não toca nem no eixo Ox nem no eixo Oy.

(b) Quando $x \to +\infty$, então $y \to 0^+$. Traduzimos esta afirmação da seguinte forma: quando x cresce arbitrariamente, com valores positivos, então a fração $y = k/x$ é positiva, mas, arbitrariamente próxima de zero.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{k}{x}\right) = 0^+.}$$

(c) Quando $x \to -\infty$, então $y \to 0^-$. Aqui a fração $y = k/x$ é negativa e próxima de zero.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{k}{x}\right) = 0^-.}$$

(d) Quando $x \to 0^+$, então $y \to +\infty$, ao longo do eixo vertical. Quando x é positivo e próximo de zero, a fração $y = k/x$ é arbitrariamente grande.

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{k}{x}\right) = +\infty.}$$

(e) Quando $x \to 0^-$, então $y \to -\infty$, ao longo do eixo vertical.

$$\boxed{\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{k}{x}\right) = -\infty.}$$

Com estas informações, vamos esboçar o gráfico da hipérbole $y = k/x$, $x \neq 0$, $k > 0$, que se assemelha ao da hipérbole de equação $xy = 1$, como ilustrado nas Figuras 2.32 e 2.33.

Quando $x \to 0$ ou $x \to \pm\infty$, vemos que o gráfico da hipérbole aproxima-se do eixo Oy ou do eixo Ox e, portanto, o eixo Ox, de equação $y = 0$, e o eixo Oy, de equação $x = 0$, são as assíntotas da hipérbole.

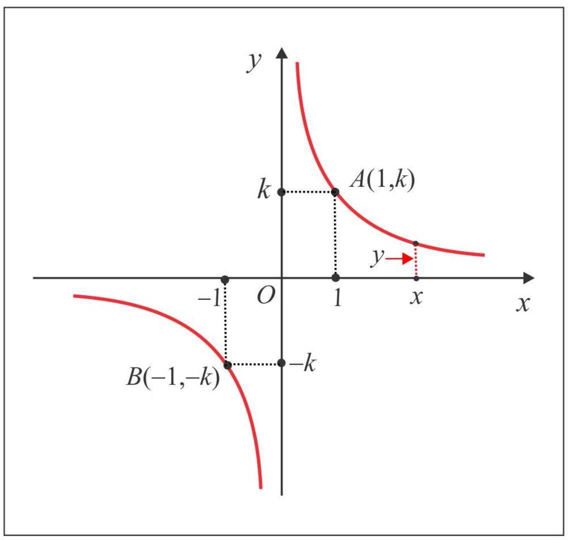


Figura 2.32: $xy = k, \quad k > 0$.

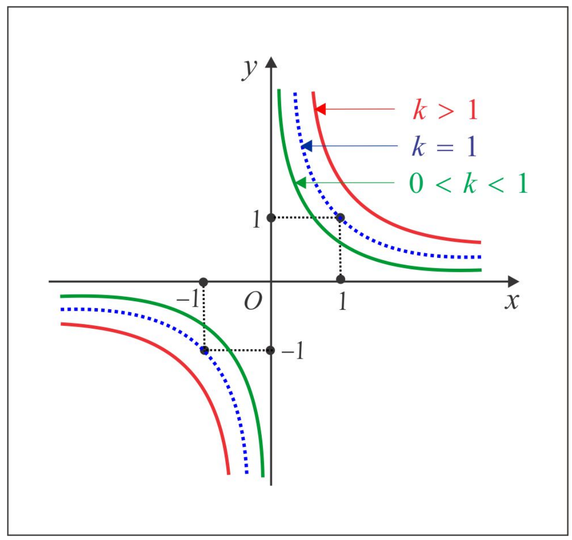


Figura 2.33: $xy = k, \quad k > 0$.

CASO 1: $k < 0$

Este é o caso em que x e y têm sinais opostos e o gráfico da hipérbole tem um ramo no 2º quadrante $(x < 0,\ y > 0)$ e outro no 4º quadrante $(x > 0,\ y < 0)$. O comportamento do y segue o mesmo ritual do 1º Caso, com algumas modificações nos sinais.

(a) Como $x \neq 0$ e $y \neq 0$, o gráfico da hipérbole $y = k/x$ não toca nem no eixo Ox nem no eixo Oy.

(b) Quando $x \to +\infty$, então $y \to 0^-$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{k}{x}\right) = 0^-.}$$

(c) Quando $x \to -\infty$, então $y \to 0^+$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{k}{x}\right) = 0^+.}$$

(d) Quando $x \to 0^+$, então $y \to -\infty$, ao longo do eixo vertical.

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{k}{x}\right) = -\infty.}$$

(e) Quando $x \to 0^-$, então $y \to +\infty$, ao longo do eixo vertical.

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{k}{x}\right) = +\infty.}$$

Os eixos Ox e Oy são as assíntotas desta hipérbole e o gráfico está ilustrado nas Figuras 2.34 e 2.35.

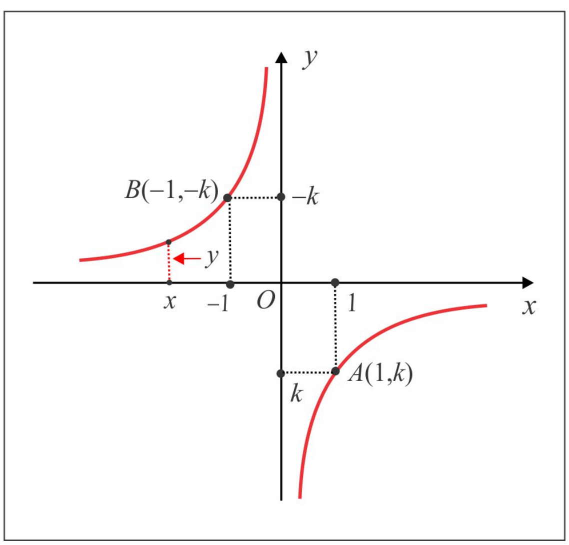


Figura 2.34: $xy = k, \quad k < 0$.

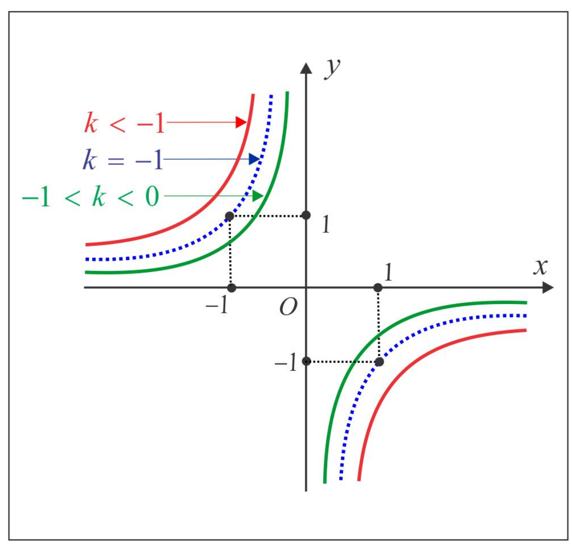


Figura 2.35: $xy = k, \quad k < 0$.

CASO GERAL: O caso geral (2.38) se reduz ao Caso 1 ou 2, por meio de uma mudança de variável (translação). Vejamos o passo-a-passo até à equação final $\overline{y} = k/\overline{x}$, com $k = \dfrac{bc - ad}{c^2}$.

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}\left(\frac{x+b/a}{x+d/c}\right) = \frac{a}{c}\left[\frac{(x+d/c)+b/a-d/c}{x+d/c}\right] = \frac{a}{c}\left(1+\frac{b/a-d/c}{x+d/c}\right) \Leftrightarrow \boxed{y - \frac{a}{c} = \frac{k}{x+d/c}.}$$

EXEMPLO 2.6.4 *Vamos estudar a hipérbole governada pela equação*:

$$y = \frac{2x-4}{x-1}.$$

Inicialmente observamos que $x \neq 1$ e que a equação da hipérbole é equivalente a:

$$y - 2 = \frac{-2}{x-1}$$

e com a mudança de variável $\bar{x} = x - 1$ e $\bar{y} = y - 2$ a equação assume a forma do Caso 2, com $k = -2$:

$$\overline{y} = -\frac{2}{\overline{x}}.$$

As assíntotas são as retas $\bar{x} = 0$ e $\bar{y} = 0$, isto é, $x = 1$ e $y = 2$. As interseções com os eixos Ox e Oy são os pontos $A(2,0)$ e $B(0,4)$, respectivamente. O gráfico tem o aspecto da Figura 2.36.

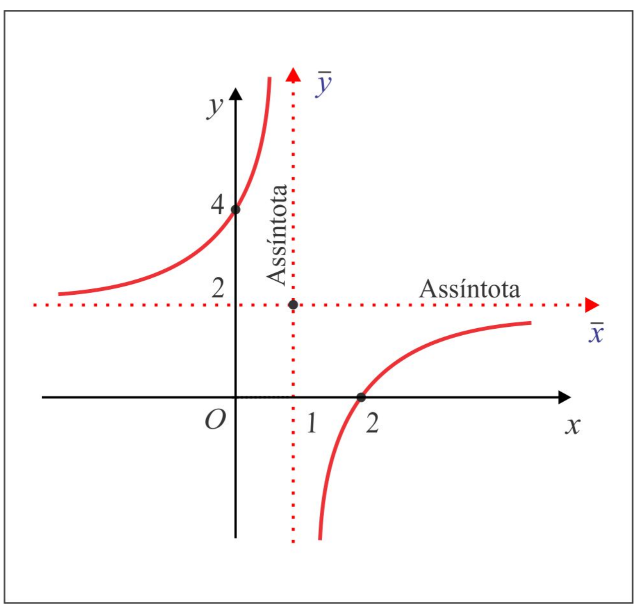


Figura 2.36: Hipérbole Equilátera $y = \dfrac{2x-4}{x-1}$.

▶ **SOBRE A NOTAÇÃO DE LIMITE** Vamos destacar alguns aspectos decorrentes da expressão:

$$\boxed{\lim_{x\to a} y = b.}$$

(i) Lê-se: "limite quando x tende para a de y é igual a b".

(ii) Na expressão não está especificado se x está á direita ou à esquerda de $\underline{a}$; ela relata que x está arbitrariamente próximo de a, sem contudo, atingir o valor $\underline{a}$.

(iii) Para especificar que x tende para $\underline{a}$ da esquerda para a direita, isto é, com valores menores do que a, anotamos: $x \to a^-$. A expressão $\lim\limits_{x\to a^-} y = b$ indica um *limite lateral à esquerda*. Da mesma forma, $\lim\limits_{x\to a^+} y = b$ indica que y estará arbitrariamente próximo de $\underline{b}$, quando x estiver à direita (maior do que) e arbitrariamente próximo de $\underline{a}$ e indica um *limite lateral à direita*.

(iv) Por fim, o limite de y quando $x \to a$ existe e tem valor $\underline{b}$ se, e somente se, os limites laterais no ponto $\underline{a}$ forem iguais a $\underline{b}$, isto é:

$$\boxed{\lim_{x\to a} y = b \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} y = b \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a^-} y = b.} \tag{2.40}$$

A equivalência (2.40) é um argumento bastante utilizado na investigação da existência de limite.

▶ **ESCREVENDO PARA APRENDER 2.6**

1. Encontre a equação, os elementos principais (*focos*, *vértices*, *excentricidade*, *centro*, *eixos e assíntotas*) e esboce o gráfico da hipérbole caracterizada por:

   (a) Focos $F_1(5,0)$, $F_2(-5,0)$ e diferença dos raios focais igual a 6.

   (b) Focos $F_1(2,-7)$, $F_2(2,5)$ e diferença dos raios focais igual a 5.

   (c) Vértices em $A_1(2,-1)$, $A_2(2,7)$ e excentricidade $e = 3/2$.

   (d) Vértices em $A_1(0,-2)$, $A_2(0,2)$, não corta o eixo x e tem assíntotas $y = \pm 2x$.

   (e) Focos $F_1(-2,2)$, $F_2(2,-2)$ e vértices $V_1(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ e $V_1(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

2. Calcule a área do triângulo determinado pela reta $9x + 2y = 24$ e pelas assíntotas da hipérbole $9x^2 - 4y^2 = 36$.

3. Um triângulo tem a base fixa e o produto das inclinações dos lados variáveis é sempre igual a 4. Se a base é o segmento que une os pontos $A(3,0)$ e $B(-3,0)$, identifique o lugar geométrico descrito pelo vértice oposto à base.

4. Determine a equação da hipérbole com centro na origem, um vértice no ponto $V_1(6,0)$ e tendo a reta $4x-3y=0$ como uma das assíntotas.

5. Ache a excentricidade, o centro, os focos e as assíntotas da hipérbole $4y^2-9x^2+16y+18x=29$.

6. Se e é a excentricidade da hipérbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, mostre que os raios focais de um ponto $P_0(x_0,y_0)$ da hipérbole têm comprimento $|ex_0 \pm a|$. Determine os comprimentos dos raios focais do ponto $P_0(6,5)$ sobre a hipérbole $5x^2-4y^2=80$.

7. O centro de uma hipérbole está na origem, seu eixo transverso jaz sobre o eixo y e um dos focos é o ponto $F_1(5,0)$. Se a excentricidade da hipérbole é $e=3$, determine sua equação e suas assíntotas.

8. Se α é o ângulo agudo de inclinação de uma assíntota da hipérbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, mostre que a excentricidade da hipérbole é $\sec\alpha$.

9. Esboce no mesmo sistema de coordenadas as curvas $x^2-y^2=k$ para os seguintes valores de $k: -2,\ -1,\ 0,\ 1$ e 2.

10. Esboce o gráfico e encontre as assíntotas da hipérbole equilátera: $y=\frac{2x-4}{x-1}$.

2.7 Equação Geral do 2º Grau

A equação geral do 2º grau nas variáveis x e y:

$$\boxed{Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0} \tag{2.41}$$

pode representar qualquer uma das cônicas (circunferência, elipse, hipérbole ou parábola) mas também pode representar um reta ou um par de retas. A natureza da cônica é determinada pelos coeficientes $A,\ B,\ C,\ D,\ E$ e F, e para identificá-la usamos a regra prática do *discriminante*: $\Delta=B^2-4AC$.

(a) Se $\Delta=0$, então a cônica é uma parábola;

(b) Se $\Delta < 0$, então a cônica é uma elipse;

(c) Se $\Delta > 0$, então a cônica é uma hipérbole.

A única informação que essa regra nos dá é sobre a natureza da cônica. Uma maneira mais eficiente de identificá-la consiste em efetuar mudanças de coordenadas e escrever a equação na forma padrão:

Circunferência:	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$	Elipse:	$\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$
Parábola:	$x^2 = 4py$ ou $y^2 = 4px$	Hipérbole:	$\pm\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} \mp \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

De forma geral, podemos dizer que a translação *elimina* os termos Dx e Ey do 1º grau, enquanto a rotação nos eixos tem a finalidade de *eliminar* o termo misto Bxy da equação. A seguir apresentamos, de modo sucinto, como as operações atuam na equação da cônica.

Do ponto de vista geométrico, são necessários 5 pontos para se determinar uma cônica e, no caso da parábola, 4 pontos são suficientes, tendo em vista que, nesse caso, $B^2 - AC = 0$. Se, por exemplo, $A \neq 0$ então a equação (2.41) se reduz a:

$$x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0,$$

e essa última equação contém 5 coeficientes a determinar.

2.7.1 O Ângulo de Rotação

A Figura 2.37 ao lado mostra as coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ de um ponto $P(x, y)$ após uma rotação no sentido positivo (*antihorário*) do sistema de coordenadas xOy. Representemos por θ o ângulo de rotação e observando a figura, vamos determinar as relações entre as coordenadas do ponto P nos dois sistemas. Temos:

$$\left|\begin{array}{l} x = \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB} = \overline{x}\cos\theta - \overline{y}\operatorname{sen}\theta \\ y = \overline{AP} = \overline{AD} + \overline{DP} = \overline{x}\operatorname{sen}\theta + \overline{y}\cos\theta \end{array}\right.$$

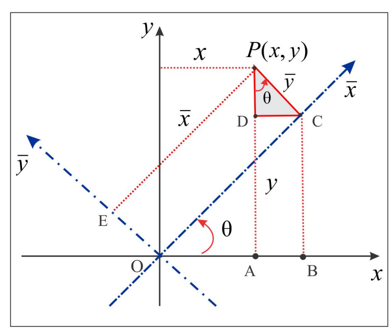


Figura 2.37: Rotação de Eixos

e invertendo o sistema, encontramos:

$$\left|\begin{array}{l} \overline{x} = x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta \\ \overline{y} = -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta. \end{array}\right.$$

Com a notação matricial, o sistema se expressa sob a forma:

$$\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 2.7.1 *Após uma rotação de $\theta = \pi/4$, as coordenadas do ponto $P(1,1)$ serão $\overline{x} = \sqrt{2}$ e $\overline{y} = 0$. De fato:*

$$\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \overline{x} = \sqrt{2} \quad e \quad \overline{y} = 0.$$

Suponhamos que A ou C não seja zero e visualizemos a a equação 2.41 sob dois aspectos.

(i) No caso em que $B = 0$ a equação (2.41) se reduz a:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{2.42}$$

e uma simples translação (completamento de quadrados) leva a equação à forma padrão. Ressaltamos que em (2.42) os coeficientes A e C não são ambos nulos, de modo que a equação pode representar qualquer uma das cônicas.

(ii) Se $B \neq 0$ é necessário efetuar uma rotação no sistema de coordenados, de modo a eliminar o termo misto Bxy da equação original. A rotação de um ângulo θ nos leva às relações já estabelecidas:

$$\left| \begin{array}{l} x = \overline{x}\cos\theta - \overline{y}\operatorname{sen}\theta \\ y = \overline{x}\operatorname{sen}\theta + \overline{y}\cos\theta, \end{array} \right. \tag{2.43}$$

e levando os valores de x e y na equação (2.41), notamos que o termo misto $x\ y$ será eliminando considerando seu coeficiente igual a zero, isto é:

$$2A\operatorname{sen}\theta\cos\theta + B\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + 2C\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0,$$

de onde segue que o ângulo θ de rotação é tal que:

$$\boxed{\operatorname{cotg}2\theta = \frac{A-C}{B}.} \tag{2.44}$$

EXEMPLO 2.7.2 *Identificar a cônica com focos $F_1(-2,2)$ e $F_2(2,-2)$ e vértices $V_1(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ e $V_2(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.*

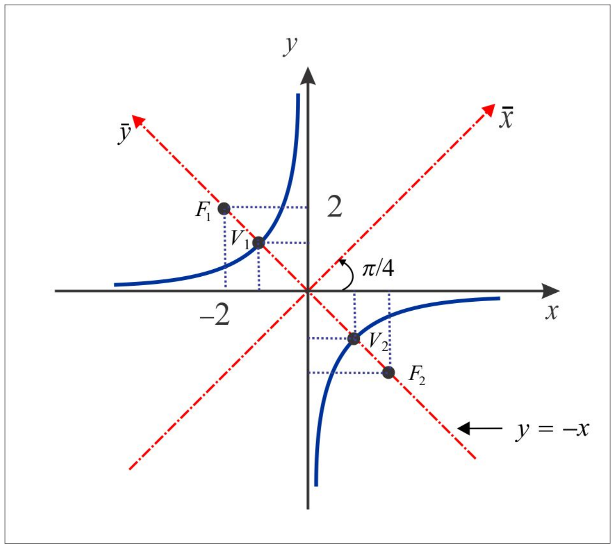


Figura 2.38: Hipérbole do Exemplo 2.7.2

Solução: Temos $c = 2\sqrt{2} > a = 2$ e trata-se de uma hipérbole. Os focos e os vétrices estão sobre a reta $y = -x$, o que sugere uma rotação de $\pi/4\,\text{rad}$, como ilustrado na Figura 2.38.

A equação da hipérbole é:

$$-\frac{\overline{x}^2}{2} + \frac{\overline{y}^2}{2} = 1$$

e de (2.43) resulta:

$$\boxed{xy = -2.}$$

EXEMPLO 2.7.3 *Determinar os focos e os vértices da hipérbole*: $xy + x - 2y + 3 = 0.$

Solução: Para ser posta na forma padrão, a equação carece de uma rotação seguida de uma translação. Efetuando uma rotação de $\pi/4\,\text{rad}$, chegamos à equação:

$$-\left(\overline{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\overline{y} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 10. \tag{2.45}$$

e com a translação: $u = \overline{x} - \sqrt{2}$ e $v = \overline{y} + 3\sqrt{2}$ chegamos à forma padrão:

$$-\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2} = 1,$$

sendo $a = \sqrt{10}$. A tabela mostra as coordenadas dos focos e dos vértices nos três sistemas:

	(u, v)	$(\overline{x}, \overline{y})$	(x, y)
Vértices	$(0, \pm\sqrt{10})$	$(\sqrt{2}/2, -3\sqrt{2}/2 \pm \sqrt{10})$	$(2-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5})$ e $(2+\sqrt{5}, -1-\sqrt{5})$
Focos	$(0, \pm\sqrt{20})$	$(\sqrt{2}/2, -3\sqrt{2}/2 \pm \sqrt{20})$	$(2-\sqrt{10}, -1+\sqrt{10})$ e $(2+\sqrt{10}, -1-\sqrt{10})$

► ESCREVENDO PARA APRENDER 2.7

1. Por meio de uma translação escreva a equação da cônica na forma padrão e identifique seus elementos principais.

   (a) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 20$ (a circunferência $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 25$)

   (b) $y^2 - 4x - 6y + 2 = 0$ (a parábola $\bar{y}^2 = 4\bar{x}$)

   (c) $3x^2 - 4y^2 + 12x + 8y = 4$ (a hipérbole $3\bar{x}^2 - 4\bar{y}^2 = 12$)

   (d) $2x^2 + 3y^2 - 42x + 12y = 20$ (a elipse $2\bar{x}^2 + 3\bar{y}^2 = 34$)

   (e) $x^2 + 2y^2 - 4x + 6y = 8$ (a elipse $2\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 = 33$)

   (f) $3x^2 - 4y^2 + 12x + 8y = 4$ (a hipérbole $3\bar{x}^2 - 4\bar{y}^2 = 12$)

2. Identifique as cônicas abaixo, escrevendo suas equações na forma padrão.

   (a) $3x^2 - 10xy + 3y^2 + x = 32$ (hipérbole)

   (b) $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 68x + 24y = 12$ (elipse)

   (c) $x^2 + xy + y^2 - 3y = 6$ (elipse)

RESPOSTAS & SUGESTÕES

ESCREVENDO PARA APRENDER 2.1

1. $M(3, -2)$.

2. $\text{dist}(A, M_{BC}) = \sqrt{(0-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{17}$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 2.2

1. (a) $m_{AB} = 1/2$ (b) $m_{AB} = 1/2$.

2. Interseção com os eixos: (a) $A(-2,0)$ e $B(0,3/2)$ (b) $A(2,0)$ e $B(0,4)$ (c) $A(1/2,0)$ e $B(0,1)$.

3. Veja o Exemplo 2.2.3 como guia.

4. $r : y = x + 1$.

5. $\text{dist}(A; r) = 6/\sqrt{5}$.

6. $r : 6x - 4y + 11 = 0$.

7. Considere $D(a,b)$ e use as igualdades entre as declividades: $m_{AB} = m_{DC}$ e $m_{BC} = m_{AD}$. O vértice procurado é $D(-5,0)$.

8. A reta procurada tem declividade $m = -a/b$ e sua equação é:

$$y - y_0 = -\frac{1}{b}(x - x_0) \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

   Considerando a reta $r : x + y = 4$ e o ponto $A(1,5)$, encontramos a reta $s : x + y = 6$.

9. Note que $\text{dist}(A,B) = \text{dist}(B,C)$.

10. O comprimento do lado do quadrado é $l = \text{dist}(A; r) = 19/\sqrt{5}$ e a área é $S = l^2 = 361/5 = 72,2$.

11. $P(-3/4, 3/2)$.

12. $\text{dist}(r; s) = \sqrt{2}/2$.

13. $b = \frac{1}{2}\left(5 \pm 3\sqrt{5}\right)$.

14. A reta $4x - 2y + 5 = 0$.

15. $B_0(-1, 4/3)$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 2.3

1. **(a)** $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$.

   (b) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$.

(c) $(x-1)^2 + y^2 = 4.$

(d) $(x-1)^2 + y^2 = 4.$

(e) $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 12$ ou $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25.$

(f) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 2.$

2. $(x-7)^2 + (y-5)^2 = 25$ e $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25.$

3. $A(4,0)$ e $B(2,-2\sqrt{3}).$

4. $y = 2x \pm 5.$

5. $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0.$

6. $5\sqrt{2}.$

7. Em (a) a equação não representa circuferência. A equação em (b) representa uma circunferência de centro $C(-2,0)$ e raio $R = \sqrt{31}.$

8. Os vértices do triângulo são $A(23,9)$, $B(11,-7)$ e $C(-1,2)$ e o incentro do triângulo é o ponto $I(10,0)$. A circunferência inscrita é governada pela equação:

$$x^2 + y^2 - 20x + 75 = 0.$$

9. Se $M(x,y)$ representa o ponto médio da haste, então as extremidades são os pontos $A(2x,0)$ e $B(0,2y)$, como ilustra a Figura (2.39).

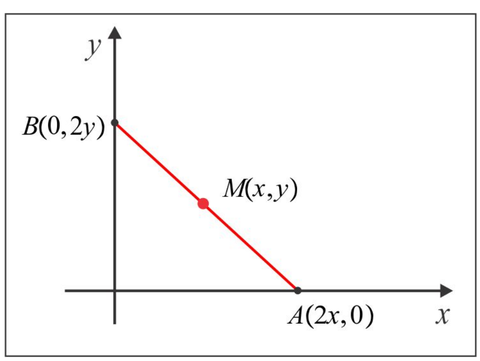


Figura 2.39: Exercício 2.3(9)

Assim:

$$30^2 = (2x)^2 + (2y)^2 = 4\left(x^2 + y^2\right)$$

e daí resulta que $x^2 + y^2 = 225$. Logo, o ponto médio M descreve um arco da circunferência $x^2 + y^2 = 15^2$.

10. Centro $C(2, -1)$ e raio $R = 3$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 2.4

1. Equação da parábola.

   (a) $y^2 = 12x, \quad V(0,0)$.

   (b) $x^2 = -8y, \quad V(0,0)$.

   (c) $y^2 = -12(x-1), \quad V(1,0)$.

   (d) $(x+4)^2 = -4(y-2), \quad V(-4,2)$.

   (e) $y^2 = -8(x-2)$, diretriz $x = 4$.

   (f) $(y+1)^2 = -4(x-4)$, Foco $F(3,-1)$, diretriz $x = 5$.

   (g) $x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 4y - 4 = 0$.

   (h) $y^2 - 6y - 12x - 15 = 0$.

   (i) $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$.

   (j) $y^2 - 6y - 4x + 17 = 0$.

2. O foco da parábola é $F(0,-4)$ e a diretriz é a reta $l : y = 4$. A equação da circunferência é $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 25$ e para concluir que esta circunferência é tangente à diretriz l, basta observar que $\operatorname{dist}(C; l) = 5$.

3. A parábola $(y-1)^2 = 4x$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 2.5

1. Elipse

   (a) $x^2/36 + y^2/27 = 1$; $A(\pm 6, 0)$, $B(0 \pm \sqrt{27})$, $C(0,0)$; $e = 1/2$.

   (b) Considerando os focos sobre a reta $x = 3$, temos:
   $$\frac{(x-3)^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1; \quad A(3 \pm \sqrt{12}, 0), \quad F(3, \pm 2), \quad C(3,0) \quad \text{e} \quad e = 1/2.$$

   (c) $x^2/25 + y^2/16 = 1$; $F(\pm 3, 0)$, $C(0,0)$; $e = 3/5$.

   (d) $x^2/20 + (y - y_0)^2/36 = 1$.

   (e) $(x-2)^2/25 + (y+1)^2/16 = 1$; $A_1(7,-1)$, $A_2(-3,-1)$, $B_1(2,3)$, $B_2(2,-5)$, $F_1(5,-1)$, $F_2(-1,-1)$, $C(2,-1)$; $e = 3/5$.

   (f) $4x^2 + 4y^2 - xy = 126$.

2. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{49} = 1$; $e = \dfrac{\sqrt{40}}{7}$.

3. $y = x \pm \sqrt{a^2 + b^2}$

4. $24\sqrt{3}$.

5. $84/5\ m$.

6. A elipse $\dfrac{(x-4)^2}{20} + \dfrac{(y-3)^2}{36} = 1$.

7. $\dfrac{(x-2)^2}{100} + \dfrac{(y-1)^2}{25} = 1$.

8. Centro $C(2,-3)$ e Focos $F\left(2 \pm \sqrt{7}, -3\right)$.

9. Os pontos $A\left(5/\sqrt{8}, \sqrt{7/8}\right)$, $B\left(-5/\sqrt{8}, \sqrt{7/8}\right)$, $C\left(-5/\sqrt{8}, -\sqrt{7/8}\right)$ e $A\left(5/\sqrt{8}, -\sqrt{7/8}\right)$.

10. Focos $F_1\left(0, \sqrt{7}\right)$ e $F_1\left(0, -\sqrt{7}\right)$; Centro $C(0,0)$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 2.6

1. Hipérbole

   (a) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$; $V(\pm 3, 0)$; $C(0,0)$; $e = 5/3$; $y = \pm 4x/3$.

(b) $\dfrac{4(y+1)^2}{25} - \dfrac{4(x-2)^2}{119} = 1$; $V_1\left(2, \frac{3}{2}\right)$; $V_2\left(2, -\frac{7}{2}\right)$ $C(2,-1)$; $e = \frac{12}{5}$; $y = -1 \pm 5(x-2)/\sqrt{119}$.

(c) $\dfrac{(y-3)^2}{16} - \dfrac{(x-2)^2}{20} = 1$; $F_1(2,-3)$; $F_2(2,9)$ $C(2,3)$; $y = 3 \pm (x-2)/5$.

(d) $y^2 - 4x^2 = 4$; $F(0, \pm\sqrt{5})$; $C(0,0)$; $e = \sqrt{5}/2$

(e) $xy = -2$.

2. $A = 12$.

3. A hipérbole $4x^2 - y^2 = 36$.

4. $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$

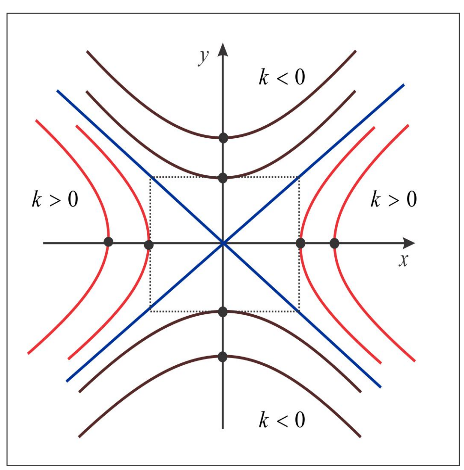
5. $e = \sqrt{13}/3$, $C(1,-2)$, $F(1, -2 \pm \sqrt{13})$ e assíntotas: $3x + 2y = -1$ e $3x - 2y = 7$.

6. 13 e 5.

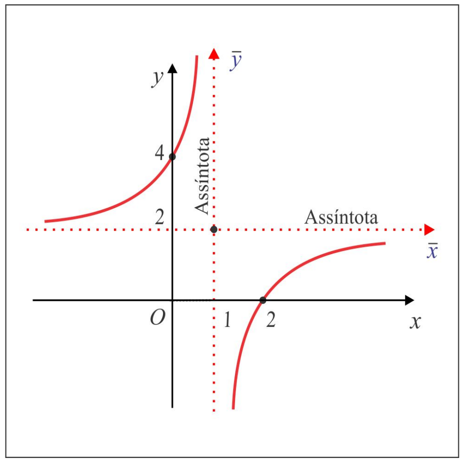
7. $\dfrac{9x^2}{25} - \dfrac{9y^2}{200} = 1$; $y = \pm 2\sqrt{2}x$.

8. Use a relação $\sqrt{1 + \tan^2\alpha} = \sec\alpha$, lembrando que $\tan\alpha = b/a$.

9. No caso $k = 0$, a equação $x^2 - y^2 = k$ representa os eixos Ox e Oy.



10. Assíntotas $x = 1$ e $y = 2$.



3.1 Introdução

O conceito de função surge naturalmente em conexão com equações algébricas, tais como:

$$y = 3x - 4, \quad y = \sqrt{x^2 - 1}, \quad y = \cos(x + 3), \quad y = \frac{x^3}{x^2 - 4}, \tag{3.1}$$

onde vemos x e y não como números fixos, mas, variáveis relacionadas. A cada possível valor atribuído à variável x corresponde um valor determinado da variável y. Por esta razão, x denomina-se *variável independente* enquanto y recebe o nome de *variável dependente* e frequentemente dizemos que y é uma função de x.

Ao contrário do que ocorreu nos exemplos (3.1), em que o valor de y como função de x foi dado por uma única expressão analítica, em muitos casos a regra que a cada x faz corresponder um único y vem dada por várias expressões, como nos exemplos abaixo. No ponto de transição, isto é, no ponto em torno do qual há mudança na expressão que define y, o comportamento do y deve ser feito de forma lateral por meio de um *limite à direita* e um *limite à esquerda* nesse ponto.

Geralmente se anota $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$, etc. para indicar que y é uma função de x. Neste contexto, $f(a)$ representa o valor de y, correspondente ao valor $x = a$, o qual é calculado substituindo x por a na expressão de $f(x)$ que define y como função de x. Por exemplo, se $y = f(x) = x^2 - 4$, então:

$$f(0) = -4, \quad f(2) = 0, \quad f(-1) = -3, \quad f(10) = 96, \quad f(a) = a^2 - 4, \quad f(1 + h) = h^2 + 2h - 3, \quad \text{etc.}$$

EXEMPLO 3.1.1 (Função definida por duas sentenças) *Seja $y = f(x)$ a função definida por:*

$$y = \left| \begin{array}{ll} x, & \textit{se} \quad x \geq 0 \\ -x + 1, & \textit{se} \quad x < 0. \end{array} \right.$$

Na Figura 3.1 ilustramos o gráfico da função e analisamos seu comportamento próximo do ponto de transição $x = 0$. Observando o gráfico, vemos que o valor de y correspondente a $x = 0$ é calculado substituindo x por 0 na expressão $y = x$ e temos $f(0) = 0$.

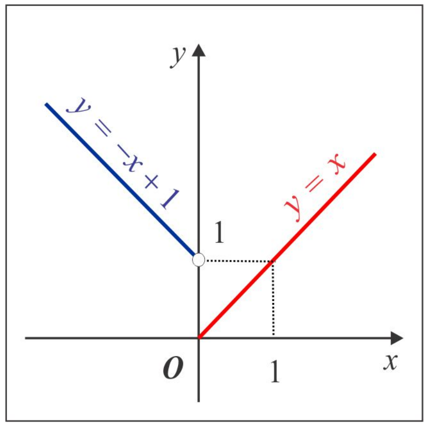


Figura 3.1: Função do Exemplo 3.1.1

Quando $x \to 0^+$, a variável y aproxima-se de zero. Por outro lado, quando $x \to 0^-$, então y aproxima-se de 1. Em símbolos, escrevemos:

(i) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ e **(ii)** $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1.$

EXEMPLO 3.1.2 (Função definida por três sentenças) *Suponhamos que $y = f(x)$ seja a função de x, obedecendo à seguinte regra:*

$$y = \left| \begin{array}{lll} 1/x, & se & x > 0 \\ x^2, & se & x \le -1 \\ x, & se & -1 < x \le 0 \end{array} \right.$$

onde vemos dois pontos de transição: $x = 0$ e $x = -1$, como mostra a Figura 3.2. Ao calcular o valor de $y = f(x)$, para um determinado x, devemos observar em qual intervalo se encontra tal x e usar a sentença correspondente de $f(x)$. O mesmo cuidado se deve ter ao analisar um limite lateral num ponto $x = a$. Por observação do gráfico, além dos valores: $f(0) = 0$, $f(2) = 1/2$ e $f(-1) = 1$, temos:

(i) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1/2$ *e* $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1/2$ **(ii)** $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ *e* $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$

(iii) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -1$ *e* $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 1$ **(iv)** $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ *e* $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty.$

Um fato que nos parece óbvio é que num ponto onde os limites laterais são distintos há um salto ("jump") no gráfico da função. Veja no gráfico o que ocorre nos pontos $x = -1$ e $x = 0$.

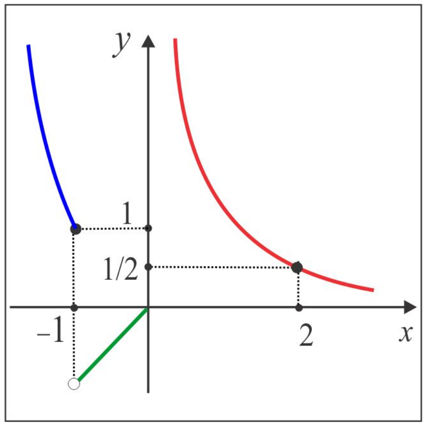


Figura 3.2: Função do Exemplo 3.1.2

3.1.1 Domínio & Imagem

É oportuno ressaltar que uma função $y = f(x)$ não é caracterizada apenas pela regra que a cada x faz corresponder um único valor de y; deve-se deixar claro o conjunto no qual a variável x pode variar, de modo que a expressão que define $f(x)$ tenha sentido, isto é, que $f(x)$ seja um número real. Um tal conjunto denomina-se *domínio* da função f e quando nos referimos apenas à regra que define a função, entendemos que o domínio é o maior conjunto de valores da variável independente x, para os quais a regra faz sentido. Por exemplo, a função $y = \dfrac{x}{x-2}$ tem para domínio o conjunto $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$ ou, com a notação de intervalos, $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

Dessa forma, uma notação precisa para a função $y = f(x)$ é:

$$f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto y = f(x)$$

onde se destaca o domínio $\mathcal{D}(f)$ (o conjunto de saída), o contradomínio $\mathbb{R}$ (o conjunto de chegada) e a regra $y = f(x)$.

Na Figura 3.3 ilustramos graficamente a ação de uma função f, onde destacamos o domínio $\mathcal{D}(f)$ e uma parte fundamental do contradomínio $\mathbb{R}$, conhecida por *conjunto imagem*, ou simplesmente *imagem*, da função f, representada por $\mathcal{I}(f)$ e definida por:

$$\mathcal{I}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x),\ x \in \mathcal{D}(f)\}.$$

A imagem de uma função f nada mais é do que o conjunto de todos os valores $f(x)$, com $x \in \mathcal{D}(f)$.

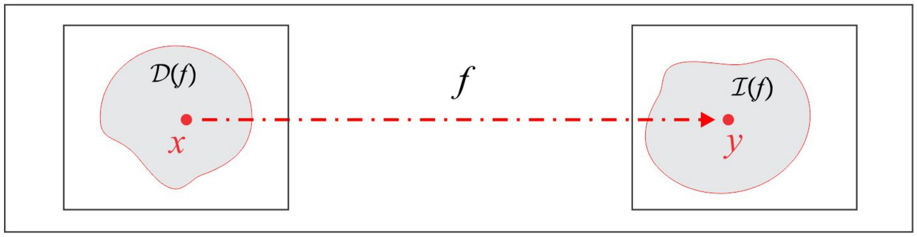


Figura 3.3: Domínio & Imagem

O domínio e a imagem de uma função são subconjuntos de $\mathbb{R}$ e as imagens estão localizados no eixo Oy. Com respeito a uma função $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ ressaltamos os seguintes fatos:

(i) A cada x do domínio $\mathcal{D}(f)$ corresponde um único y na imagem $\mathcal{I}(f)$, tal que $y = f(x)$. Uma reta vertical não pode tocar o gráfico de f em mais de um ponto.

(ii) Um mesmo y na imagem pode estar associado a mais de um valor (*pré-imagem*) x, do domínio.

(iii) Do ponto de vista gráfico, um ponto (número real) b está na imagem de uma função f quando a reta horizontal $y = b$ tocar o gráfico de f ao menos uma vez.

(iv) Se a equação $b = f(x)$ tiver alguma solução $x = a$, então b está na imagem e a é pré-imagem de b.

(v) Um ponto $A(a, b)$ jaz no gráfico de uma função $y = f(x)$ se, e somente se, $a \in \mathcal{D}(f)$ e $b = f(a)$. Assim, o gráfico de f é o subconjunto $G(f)$ do plano xy, dado por:

$$\boxed{G(f) = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : a \in D(f) \text{ e } b = f(a)\}.}$$

Na Figura 3.4 abaixo ilustramos um ponto $A(a, f(a))$ sobre o gráfico da função $y = f(x)$.

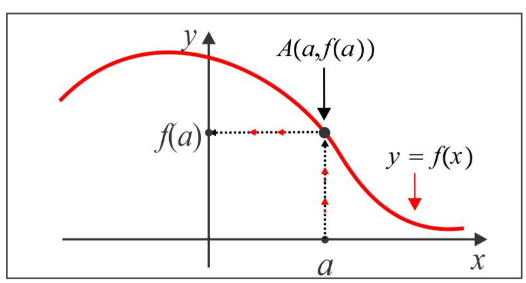


Figura 3.4: Ponto do Gráfico

EXEMPLO 3.1.3 *Consideremos a função $y = f(x)$, definida pela regra:*

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Notamos que $y \geq 0$, $\forall\, x$, e que $x^2 + y^2 = 1$ e, portanto, o gráfico da função f é a parte superior (acima do eixo Ox) da circunferência de centro $O(0,0)$ e raio $R = 1$, como ilustrado na Figura 3.5.

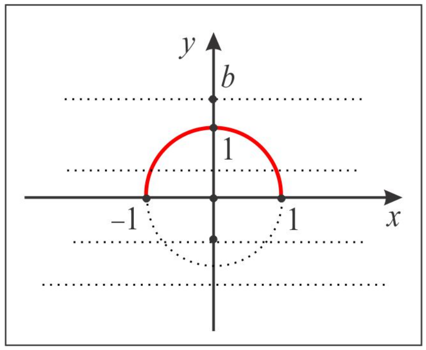


Figura 3.5: Gráfico de $y = \sqrt{1 - x^2}$.

(i) *O domínio de f :* $x \in \mathcal{D}(f) \Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. *Assim,* $\mathcal{D}(f) = [-1, 1]$.

(ii) *Se $b > 1$, então a equação $b = f(x)$ não tem solução, já que:*

$$b = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow b^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 - b^2 < 0.$$

É claro que se $b < 0$, a equação $b = \sqrt{1 - x^2}$ também não tem solução!

(iii) *A imagem de f é o intervalo $\mathcal{I}(f) = [0, 1]$. Os pontos $y = 0$ e $y = 1$ têm pré-imagem $x = 0$ e $x = \pm 1$, respectivamente.*

EXEMPLO 3.1.4 *Vamos encontrar o domínio da função $y = f(x)$, definida por:*

$$y = \frac{x - 3}{(x - 5)\sqrt{x^2 - 4}}.$$

Solução: Na identificação do domínio, há duas restrições a analisar.

(i) Na raiz quadrada o radicando não pode ser negativo: $x^2 - 4 \geq 0$.

(ii) Na fração o denominador não pode ser zero: $(x - 5)\sqrt{x^2 - 4} \neq 0$.

Assim, devemos ter $x \neq 5$ e $x^2 - 4 > 0$ e, portanto:

$$\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x < -2 \text{ ou } x > 2 \text{ e } x \neq 5\}.$$

O domínio está ilustrado na Figura 3.6 abaixo:

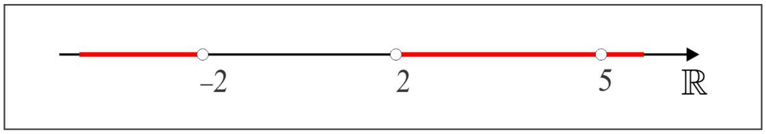


Figura 3.6: $\mathcal{D}(f)$ do Exemplo 3.1.4.

e sobre o gráfico da função f ressaltamos que ele toca o eixo Ox no ponto $A(3,0)$, mas, não toca o eixo Oy, já que em $x = 0$ a função não está definida!

► ESCREVENDO PARA APRENDER 3.1

1. Dê o domínio e esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo.

   (a) $f(x) = 3x$ (b) $g(x) = -x$ (c) $h(x) = -x + 1$

   (d) $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ (e) $g(x) - \frac{1}{2}x$ (f) $g(x) = |x - 1|$

   (g) $h(x) = \left| \begin{array}{l} x, \text{ se } x \leq 2 \\ 3, \text{ se } x > 2 \end{array} \right.$ (h) $h(x) = \left| \begin{array}{l} 2x, \text{ se } x \leq -1 \\ -x + 1, \text{ se } x > -1 \end{array} \right.$ (i) $h(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

   (j) $f(x) = |x + 2| + 1$ (k) $h(x) = \dfrac{|2x + 1|}{2x + 1}$ (l) $h(x) = |x + 2|$

   (m) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ (n) $g(x) = \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$ (o) $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$. Mostre que:

$$f(x) = \left| \begin{array}{l} -2x + 3, \text{ se } x \leq 1 \\ 1, \text{ se } 1 < x < 2 \\ 2x - 3, \text{ se } x \geq 2 \end{array} \right.$$

   e esboce o gráfico de f.

3. Determine o domínio das funções indicadas abaixo.

(a) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ (b) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$ (c) $s(t)=\sqrt{t^2-1}$ (d) $y=\dfrac{x}{x+2}$

(e) $h(x)=\sqrt{x+2}$ (f) $q(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x}$ (g) $r(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ (h) $y=\sqrt[4]{\dfrac{x}{x+3}}$

(i) $g(x)=\sqrt[3]{x^2-x}$ (j) $y=\sqrt{x(2-3x)}$ (k) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x-1}{1-3x}}$ (l) $y=\sqrt[6]{\dfrac{x-3}{x+2}}$

(m) $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ (n) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x-1}}$ (o) $y=\sqrt{4-x^2}$ (p) $y=\sqrt{5-2x^2}$

(q) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$ (r) $y=\sqrt{1-\sqrt{x}}$ (s) $y=\sqrt{x}-\sqrt{5-2x}$ (t) $y=\sqrt{x-\sqrt{x}}$

4. Uma pequena indústria fabrica termômetros e estima que o lucro semanal, em reais, pela fabricação e venda de x unidades/semana é de $R(x)=(-0.001)\,x^2+8x-5000$. Qual o lucro da empresa em uma semana que foram fabricados 1.000 termômetros?

5. Determine o domínio da função $f(x)=\sqrt{4-\left|\dfrac{3-2x}{2+x}\right|}$.

6. Considere a função f definida em $[-3,2]$ por $f(x)=\left|x^3-2x^2+3x-4\right|$. Determine dois números reais m e M tais que $m\leq f(x)\leq M$, seja qual for o valor de x no intervalo $[-3,2]$.

7. Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2+4x+5$.

   (a) Verifique que $f(x)=(x+2)^2+1$.

   (b) Esboce o gráfico de f.

   (c) Calcule o menor valor de $f(x)$ e para qual x esse valor é assumido.

8. Verifique que $\sqrt{1+x^2}-|x|=\dfrac{1}{|x|+\sqrt{1+x^2}}$ e, então, conclua que a medida que x cresce, o valor da diferença $\sqrt{1+x^2}-|x|$ aproxima-se de zero.

9. Seja $y=f(x)$ a função dada a partir da equação $x^2+y^2=4$, para $y\geq 0$.

   (a) Determine uma fórmula que defina explicitamente y como função de x.

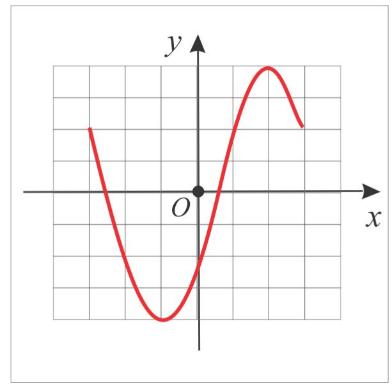
   (b) Determine o domínio de f.

   (c) Esboce o gráfico de f.

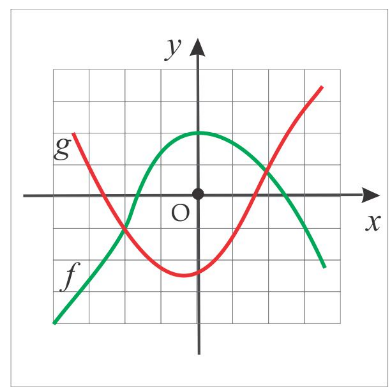
10. Uma caixa retangular sem tampa, com volume de $2m^3$, tem uma base quadrada. Expresse a área S da superfície da caixa como uma função do comprimento x de um lado da base.

11. À medida que o ar seco move-se para cima, ele se expande e esfria. Sabendo-se que a temperatura do solo é de 20^0C e que a temperatura a $1km$ de altura é de 10^0C, expresse a temperatuta T, em ^0C, como uma variável dependente da altura h, medida em km, supondo que um modelo baseado em uma função *afim* seja apropriado. Qual a temperatura a uma altura de $2,5km$?

12. Suponha que a figura abaixo representa graficamente uma função $y = f(x)$.
    (a) Determine $f(-1)$.
    (b) É correta a estimativa $2 < f(2) < 3$?
    (c) Para quais valores de x tem-se $f(x) = 2$?
    (d) Para quantos valores de x tem-se $f(x) = 0$?
    (e) Qual o domínio de f?
    (f) Qual a imagem de f ?



13. Considere as funções f e g, cujos gráficos são representados na figura abaixo.
    (a) Obtenha os valores de $f(-4)$ e $g(3)$.
    (b) Para quais valores de x, $f(x) = g(x)$?
    (c) Estabeleça o domínio e a imagem de f.
    (d) Estabeleça o domínio e a imagem de g.
    (e) Para quantos valores de x, $f(x) = 0$?
    (f) Para quantos valores de x, $g(x) = 0$?



3.2 Funções Elementares

A seguir apresentaremos as primeiras funções elementares do Cálculo e a partir delas construiremos novas funções, por meio de operações algébricas e composições.

► FUNÇÃO AFIM Por *Função Afim* entendemos qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada x associa o valor $y = ax + b$, sendo a e b constantes. O gráfico de uma função afim é a reta r descrita pela equação

$$\boxed{y = ax + b,} \tag{3.2}$$

com declividade $m = a$ e que passa no ponto $A(0, b)$. Veja a ilustração gráfica nas Figuras 3.7 e 3.8.

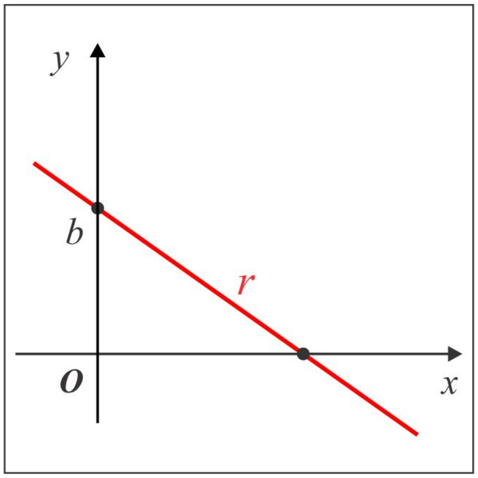


Figura 3.7: Função Afim $y = ax + b$

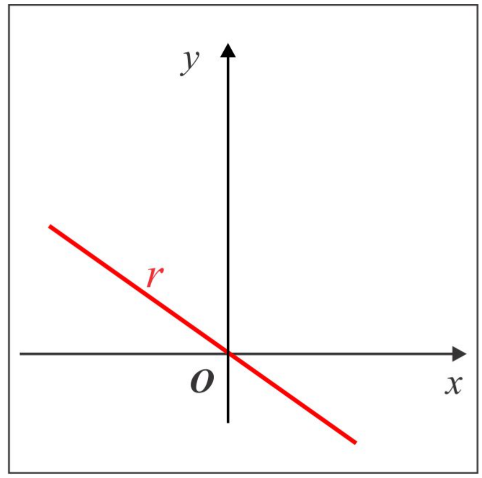


Figura 3.8: Função Linear $y = ax$

No caso em que $b = 0$ a função afim assume a forma $y = ax$ e recebe o nome de *Função Linear*, que tem a particularidade do gráfico passar pela origem. Uma função afim tem domínio e imagem iguais a $\mathbb{R}$. O termo *afim* provém do latim *affine* e significa *semelhança*; a denominação *função afim* é decorrente da semelhaça do seu gráfco com o da função linear (ambos são linhas retas).

► **FUNÇÃO QUADRÁTICA** É qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por um trinômio do segundo grau:

$$\boxed{y = f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,} \tag{3.3}$$

cujo gráfico é uma parábola e a imagem varia de acordo com os coeficientes. Por exemplo, a imagem da função $y = f(x) = x^2$ é o intervalo $[0, +\infty)$, enquanto a função definida pela regra

$$y = g(x) = 1 - x^2$$

tem para imagem o intervalo $(-\infty, 1]$, como ilustram as Figuras 3.9 e 3.10.

► **FUNÇÃO POLINOMIAL** É qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por um polinômio:

$$\boxed{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0} \tag{3.4}$$

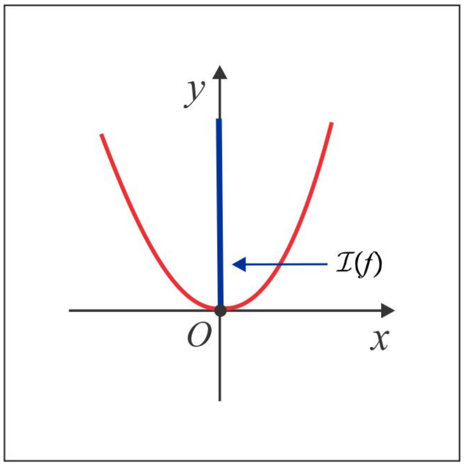


Figura 3.9: Função $y = x^2$

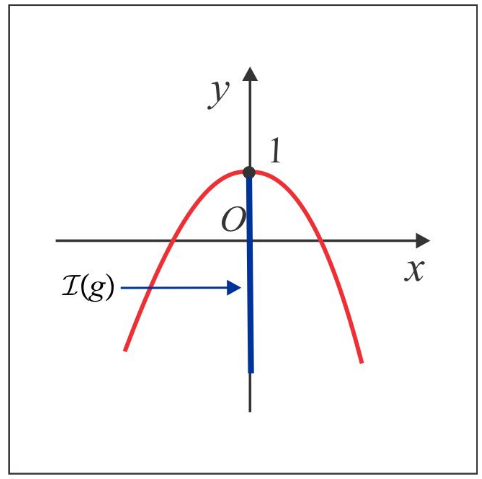


Figura 3.10: Função $y = 1 - x^2$

com coeficientes constantes a_0, $a_1, \ldots, a_n$ e no caso em que $a_n \neq 0$ o polinômio diz-se de grau n. Além das funções constantes $f(x) = k$, $\forall\, x$, também são polinomiais as funções afins (3.2), as quadráticas (3.3) e as funções $f(x) = \pm x^3$, que aparecem com bastante frequência. Veja as Figuras 3.11 e 3.12.

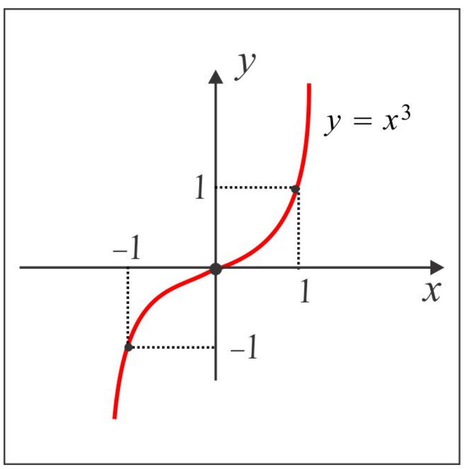


Figura 3.11: Função $y = x^3$

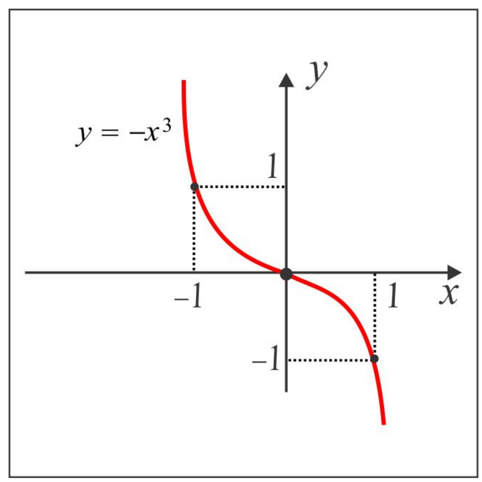


Figura 3.12: Função $y = -x^3$

► **FUNÇÃO RACIONAL** Por *Função Racional* entendemos aquela cuja regra é dada como quociente de dois polinômios. Em se tratando de um quociente, o denominador não pode ser zero e se a função racional é dada por:

$$\boxed{f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}} \tag{3.5}$$

sendo $p(x)$ e $q(x)$ dois polinômios, então $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$. As equações (2.38) que representam hipérboles equiláteras, são exemplos de funções racionais. Neste caso, temos:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

com domínio $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -d/c\}$.

▶ **FUNÇÃO MODULAR** Com as funções lineares $y = x$ e $y = -x$ construímos a *Função Modular*:

$$\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto y = |x|.} \tag{3.6}$$

Decorre da definição de módulo que $f(x) = x$, se $x \geq 0$ e para $x < 0$, temos $f(x) = -x$. Sendo $|x| \geq 0$, $\forall\, x$, resulta que a imagem da função f é dada por $\mathcal{I}(f) = [0, = \infty)$, veja a Figura 3.13.

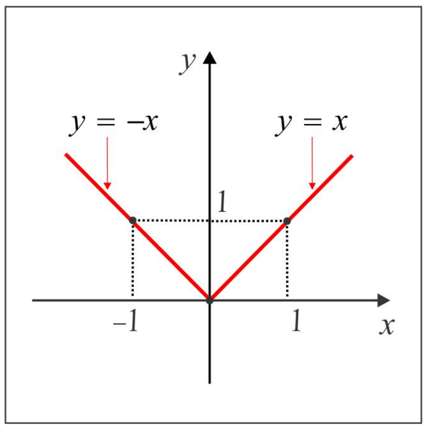


Figura 3.13: Função Modular $y = |x|$.

▶ **FUNÇÃO RAIZ QUADRADA** Ao resolver a equação $y^2 = x$ para explicitar a variável y como função de x, obtemos as equações $y = \pm\sqrt{x}$, $x \geq 0$, que produzem duas funções definidas no intervalo $[0, +\infty)$, quais sejam:

$$y = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

No caso em que $x \leq 0$, podemos definir as funções:

$$y = \sqrt{-x} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{-x}.$$

Nas Figuras 3.14 e 3.15 ilustramos as quatro funções de x, definidas a partir da equação $x = \pm y^2$.

Combinando essas funções elementares, podemos construir novas funções e representá-las graficamente. Vejamos alguns exemplos.

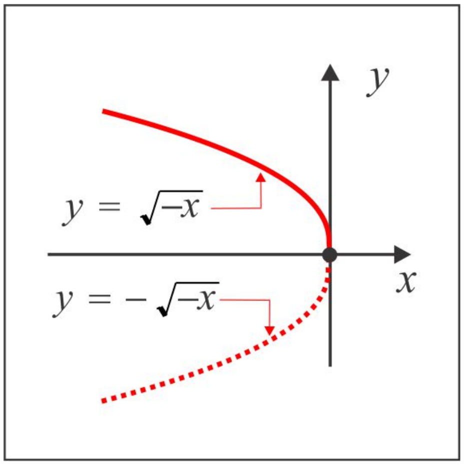


Figura 3.14: $y = \pm\sqrt{x}, \quad x \geq 0.$

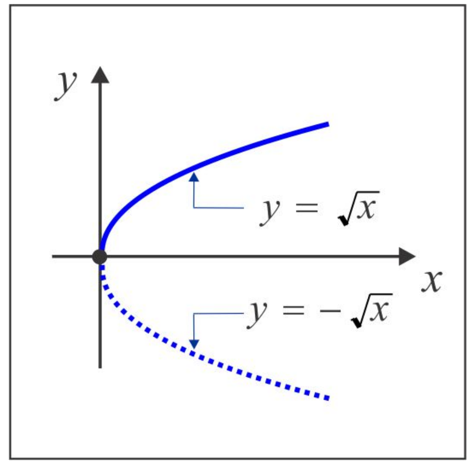


Figura 3.15: $y = \pm\sqrt{-x}, \quad x \leq 0.$

EXEMPLO 3.2.1 *A função $f(x) = 1 + (x-2)^3$ está definida para todo x, de modo que $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Seu gráfico é obtido por simples translação do gráfico de $y = x^3$, considerando $\bar{x} = x - 2$ e $\bar{y} = y - 1$. Abaixo ilustramos os gráficos antes e depois da translação.*

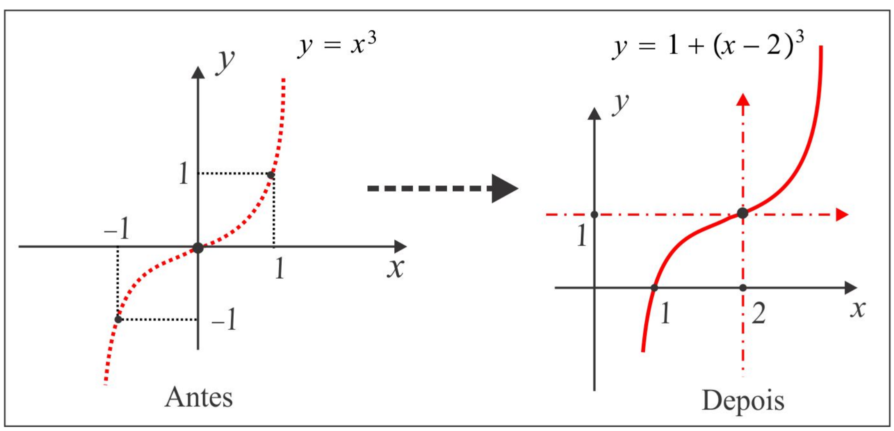


Figura 3.16: Função $y = 1 + (x-2)^3$.

EXEMPLO 3.2.2 *Deixe $y = f(x)$ ser a função definida em $\mathbb{R}$ pela regra $y = |x-1| - 1$. Aqui usaremos a translação $\bar{x} = x - 1$ e $\bar{y} = y + 1$ para esboçar o gráfico de f.*

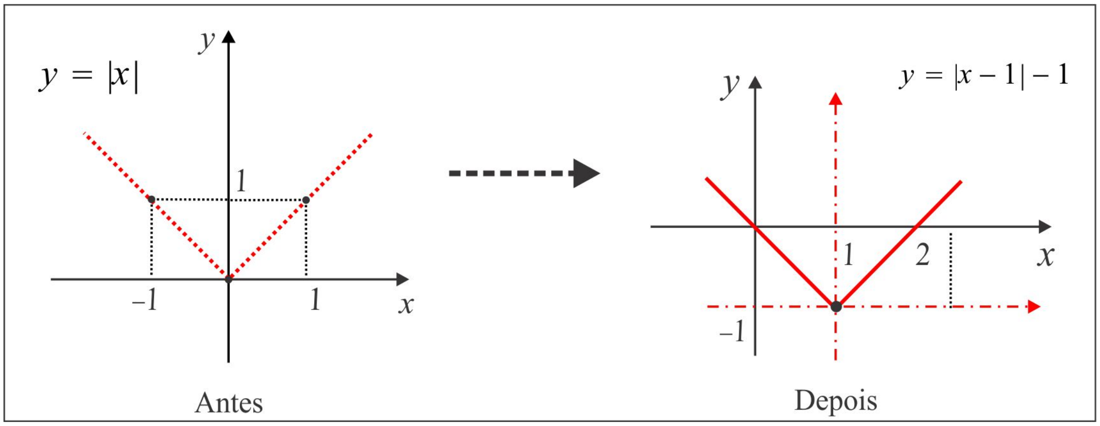


Figura 3.17: Função $y = |x-1| - 1$.

EXEMPLO 3.2.3 *Esboçar o gráfico e identificar a imagem da função $y = f(x)$, definida pela regra:*

$$f(x) = \begin{cases} |x-1|, & se \quad 0 < x \leq 2 \\ 2, & se \quad x > 2 \\ \sqrt{-x}, & se \quad -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Solução: Com o gráfico visualizamos todo o comportamento da função; note que ela está definida em todo x real, de modo que $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. A imagem da função é o intervalo fechado $\mathcal{I}(f) = [0,1] \cup \{2\}$ e os limites laterais de f nos pontos 0 e 2 são determinados a partir da leitura do gráfico.

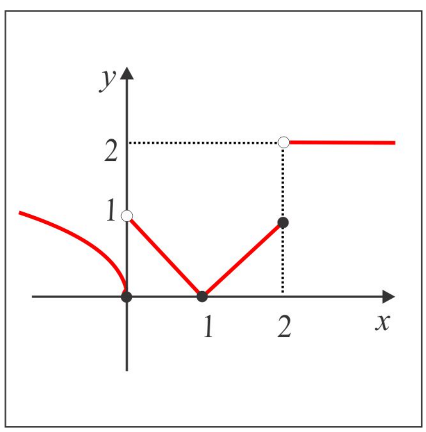


Figura 3.18: Função do Exemplo 3.2.3

(i) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ **(ii)** $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ **(iii)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2$ **(iv)** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$.

OBSERVAÇÃO 3.2.4 (Sobre os limites laterais de uma função) *Dada uma função $y = f(x)$ definida em um intervalo I da reta $\mathbb{R}$, exceto, possivelmente, no ponto $x = a$ interior ao intervalo I, ao escrever $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ entendemos que os valores $f(x)$ estão arbtitrariamente próximos do número L, para x maior e arbbitrariamente próximo do número a. Esse limite lateral à direita no ponto a também é representado por $f(a^+)$ e temos*:

$$f\left(a^+\right) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x).$$

De forma similar, $x \to a^-$ significa que a variável x aproxima-se arbibitrariamente de a, com valores menores do que a e anota-se:

$$f\left(a^-\right) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x).$$

EXEMPLO 3.2.5 (O gráfico de $y = |f(x)|$) *Após esboçar o gráfico da função $y = f(x)$ analisamos o sinal da função f e a parte do gráfico abaixo do eixo Ox (isto ocorre no intervalo onde $f < 0$) será rebatida (ou refletida) para cima; a parte do gráfico acima do eixo Ox não sofre alteração. Desta forma, obtemos o gráfico da função $|f|$. Este artifício está embasado no conceito de módulo*:

$$\left|f(x)\right| = \left| \begin{array}{rl} f(x), & se\ \ f(x) \geq 0 \\ -f(x), & se\ \ f(x) < 0. \end{array} \right.$$

Recorde-se que ao trocar o sinal da coordenada y do ponto $P(x,y)$, este é refletido em torno do eixo Ox. Na Figura 3.19 ilustramos os gráficos das funções $y = x^2 - 2$ e $y = |x^2 - 2|$, onde notamos que a função $y = x^2 - 2$ é negativa no intervalo $\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

3.3 Classificando Funções Reais

► **PARIDADE** Uma função f, definida em um intervalo simétrico $[-a, a]$, denomina-se *função par* se nesse intervalo satisfaz à relação $f(x) = f(-x)$. Se $f(x) = -f(-x)$, para todo x no intervalo $[-a, a]$, então f é denominada *função ímpar*. Graficamente, uma função ser par significa que seu gráfico é simétrico em relação ao eixo Oy, enquanto uma função ímpar tem seu gráfico simétrico em relação à origem. Por exemplo, as funções $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = |x|$ são funções pares, já que:

$$f_1(-x) = (-x)^2 = x^2 = f_1(x) \quad \text{e} \quad f_2(-x) = |-x| = |x| = f_2(x),$$

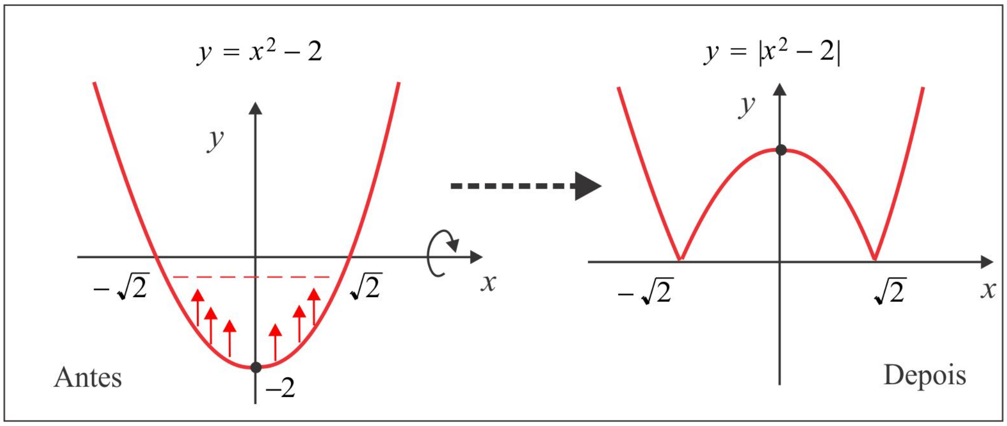


Figura 3.19: Gráfico de $y = \left|x^2 - 2\right|$.

e as funções $g_1(x) = x$ e $g_2(x) = x^3$ são funções ímpares, porque:

$$g_1(-x) = -x = -g_1(x) \quad \text{e} \quad g_2(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g_2(x).$$

Veja nas Figuras 3.9 e 3.13 a simetria, em relação ao eixo Oy, dos gráficos de $y = x^2$ e $y = |x|$, enquanto na Figura 3.11 notamos a simetria, em relação à origem, do gráfico da função $y = x^3$. É oportuno ressaltar que toda função ímpar passa necessariamente pela origem, tendo em vista que:

$$f(0) = -f(-0) = -f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

▶ MONOTONIA Com relação ao crescimento, as funções reais se classificam em: *crescente*, *decrescente*, *não crescente* ou *não decrecente*. Em qualquer desses casos, a função recebe a denominação de *Função Monótona*. Temos:

(a) Uma função f é *crescente* em um intervalo I, se $f(x_1) < f(x_2)$, sempre que $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$. Se $f(x_1) \leq f(x_2)$, para $x_1 \leq x_2$, então f é dita não-decrescente em I.

(b) Uma função f é *decrescente* em um intervalo I, se dados $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$. Se $f(x_1) \geq f(x_2)$, para $x_1 \leq x_2$, então f é dita não-crescente em I.

Nas Figuras 3.20 e 3.21 ilustramos graficamente, de forma genérica, uma função crescente $y = f(x)$ e outra decrescente $y = g(x)$.

▶ LIMITAÇÃO Uma função $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ denomina-se *limitada inferiormente* quando existir uma constante m, tal que

$$m \leq f(x), \quad \text{para todo } x \text{ no domínio } \mathcal{D}. \tag{3.7}$$

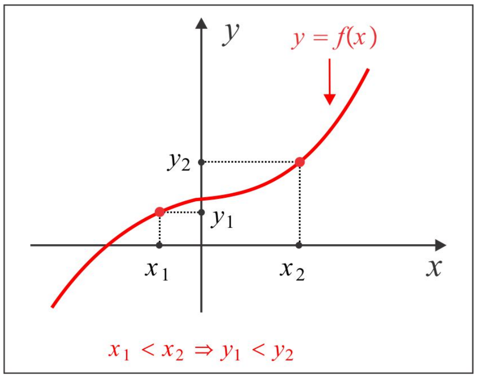


Figura 3.20: Função Crescente

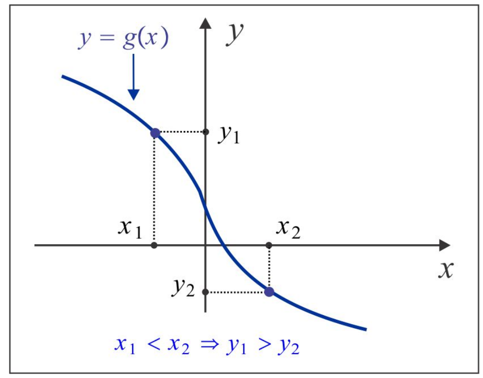


Figura 3.21: Função Decrescente

Uma tal constante m denomina-se *Cota Inferior* de f. Quando existir uma constante M, tal que

$$f(x) \leq M, \quad \text{para todo } x \text{ no domínio } \mathcal{D}, \tag{3.8}$$

diremos que a função f é *limitada superiormente* e cada constante M que satisfaz (3.8) leva o nome de *Cota Superior* de f. Diremos que f é *limitada* quando o for superior e inferiormente. Neste caso existirá uma constante $C > 0$, tal que:

$$|f(x)| \leq C, \quad \forall x \in \mathcal{D}. \tag{3.9}$$

EXEMPLO 3.3.1 *A função $f(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}$, é limitada apenas inferiormente e $m = 0$ é uma cota inferior de f, já que $f(x) = |x| \geq 0, \ \forall \ x$. Se considerarmos a mesma função $f(x) = |x|$ no domínio $-1 \leq x \leq 2$, ela passa a ser, também, limitada superiormente. Neste caso temos:*

$$0 \leq |x| \leq 2, \quad -1 \leq x \leq 2,$$

e qualquer constante $C \geq 2$ atende à desigualdade (3.9).

► **BIJETIVIDADE** Vimos em alguns exemplos que uma dada função pode assumir o mesmo valor em dois ou mais pontos distintos do seu domínio; em outros vimos que um ou mais pontos do contradomínio não tem pré-imagem. Por exemplo, a função $f(x) = x^2$ é tal que $f(-1) = f(1) = 1$, ou seja, os pontos distintos $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$ têm a mesma imagem e, se $y < 0$, não existe x, tal que $f(x) = y$.

(I) Uma função $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ é *Injetiva* (ou *Injetora*) quando pontos distintos possuirem imagens distintas. Em símbolos, temos:

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'), \quad x, x' \in \mathcal{D}.$$

Do ponto de vista gráfico, reconhecer uma função injetiva é uma tarefa bem simples. Ela será injetiva quando qualquer reta horizontal ($y = b$) que tocar seu gráfico o faz em um único ponto!

(II) Uma função $f : \mathcal{D} \to \mathcal{I}(f)$, cujo contradomínio coincide com sua imagem, recebe a denominação de *Sobrejetiva* (ou *Sobrejetora*).

(III) Leva o nome de *Bijetiva* (ou *Bijetora*) qualquer função $f : \mathcal{D} \to \mathcal{I}(f)$ que é, ao mesmo tempo, injetiva e sobrejetiva.

EXEMPLO 3.3.2 *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $y = f(x) = x^2$ não é injetora, porque os pontos simétricos x e $-x$ têm mesma imagem; também não é sobrejetora, porque $\mathcal{I}(f) = [0, +\infty)$ não é igual ao contradomínio. É possível torná-la bijetiva? Sim, e o processo consiste em duas etapas.*

(i) *Restringimos o contradomínio até torná-lo igual $\mathcal{I}(f)$, descartando todos os pontos do contradomínio sem pré-imagem. Se $b = f(a)$, então b é imagem de a ou a é pré-imagem de b.*

(ii) *Restringimos o domínio até torná-la injetora, eliminando os pontos com mesma imagem, deixando apenas um representante x para cada imagem y.*

Procedendo desta forma, chegamos à função bijetiva $f_1 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, definida pela mesma regra $f_1(x) = x^2$. Ela também se tornaria bijetiva se considerássemos o domínio $(-\infty, 0]$ e o contradomínio $[0, +\infty)$. Neste caso, teríamos a função $f_2 : (-\infty, 0] \to [0, +\infty)$, definida por $f_2(x) = x^2$. As funções f_1 e f_2, embora definidas pela mesma regra, são distintas, porque têm domínios diferentes.

► ESCREVENDO PARA APRENDER 3.3

1. Em cada caso, verifique se a função é par ou ímpar.

   (a) $f(x) = x^3$ (b) $g(x) = x^2$ (c) $h(x) = 2x - x^2$ (d) $k(x) = 1 - x^4$ (e) $f(x) = |x|$.

2. Dada uma função f, definida em um intervalo $[-a, a]$, mostre que $g(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right]$ é uma função par e que $h(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) - f(-x)\right]$ é uma função ímpar. Note que $f = g + h$ é a soma de uma função par com uma função ímpar.

3. Estabeleça as seguintes regras sobre funções pares e ímpares:

(a) Se f e g são funções pares, então $f + g$ e $f \cdot g$ são funções pares.

(b) Se f e g são funções ímpares, então $f + g$ é ímpar e $f \cdot g$ é par.

(c) Se f é uma função par e g é uma função ímpar, então $f \cdot g$ é ímpar.

4. As funções $f : D(f) \to \mathbb{R}$ e $g : D(g) \to \mathbb{R}$ são iguais quando possuirem o mesmo domínio, isto é, $D(f) = D(g)$ e, além disso, $f(x) = g(x), \quad \forall x$. Em cada caso, decida se f e g são iguais ou não.

   (a) $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1} \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{x^2 - x}$.

   (b) $f(x) = x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = |x|^2$.

   (c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{e} \quad g(x) = x + 1$.

   (d) $f(x) = x \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{x^2}$.

5. Determine a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ que satisfaz $f(0) = 5,\ f(-1) = 10$ e $f(1) = 6$.

6. Verifique onde a função $f(x) = x^2$ é crescente e onde ela é decrescente. Idem para a função $g(x) = |x - 1| + 2$.

7. Mostre que a *função afim* $f(x) = ax + b$ é crescente, se $a > 0$, e decrescente, se $a < 0$.

8. Com relação ao gráfico apresentado no Exercício 12 da seção 3.1, identifique o conjunto no qual f é uma função crescente.

9. Construa uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitada apenas inferiormente e uma função $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ não limitada nem superior nem inferiormente.

10. Construa os gráficos das seguintes funções e determine uma constante $C > 0$, tal que $|g(x)| \leq C$ no domínio sugerido.

    (a) $g(x) = \left|x^3\right|,\ -1 \leq x < 2$ (b) $g(x) = |1/x|,\ |x| \geq 2$ (c) $g(x) = \left|x^2 - 1\right|,\ -3 \leq x < 2$.

11. Esboce o gráfico da função $y = f(x)$ e determine, caso exista, cota superior ou inferior.

    (a) $y = |x| - 1$ (b) $y = \big|\,|x| - 1\big|$ (c) $y = |x + 1| - |x|$ (d) $y = \left|2x^2 - 8\right|$.

3.4 Operações com Funções Reais

3.4.1 Operações Algébricas

Consideremos duas funções reais $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ definidas no mesmo domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. As operações algébricas: soma, produto e quociente entre f e g são efetuadas ponto a ponto.

▶ SOMA A *soma* de f com g é a função $f + g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, definida pela regra:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in \mathcal{D}.$$

▶ PRODUTO O *produto* da função f pela função g é a função $f \cdot g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad x \in \mathcal{D}.$$

No caso em que f é a função constante, digamos, $f(x) = k$, $\forall\, x$, temos $(k \cdot g)(x) = k \cdot g(x)$, $x \in \mathcal{D}$.

▶ QUOCIENTE O quociente f/g, de f por g, é definida no domínio $\mathcal{D}' = \{x \in \mathcal{D} : g\,(x) \neq 0\}$ por:

$$(f/g)\,(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in \mathcal{D}'.$$

As operações soma e produto de funções herdam as propriedades algébricas do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

(i) Comutativa: $f + g = g + f$ e $f \cdot g = g \cdot f$.

(ii) Associativa: $(f+g)+h = f+(g+h)$ e $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$.

(iii) Elemento Neutro da Soma: $f + \mathbf{0} = f$. A função constante de valor zero em cada x do domínio $\mathcal{D}$ é a *função nula*, representada por $\mathbf{0}$. Temos:

$$(f+\mathbf{0})\,(x) = f\,(x) + \mathbf{0}\,(x) = f\,(x)\,, \quad x \in \mathcal{D}.$$

(iv) Existência do Simétrico: $f + (-f) = \mathbf{0}$. Dada uma função f, se definirmos a função $-f$ por $(-f)\,(x) = -f\,(x)\,,\ \ x \in \mathcal{D}$, teremos:

$$\big[f + (-f)\big]\,(x) = f\,(x) + (-f)\,(x) = f\,(x) - f\,(x) = 0, \quad \forall\, x \in \mathcal{D}.$$

(vi) Distributiva: $f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h$. De fato, dado $x \in \mathcal{D}$, temos:

$$\begin{aligned}\left[f \cdot (g + h)\right](x) &= f(x) \cdot (g + h)(x) = f(x) \cdot [g(x) + h(x)] = f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot h(x) \\ &= (f \cdot g)(x) + (f \cdot h)(x).\end{aligned}$$

(vii) Elemento Neutro do Produto: $f \cdot \mathbf{1} = f$. Representando por $\mathbf{1}$ a função constante e igual a 1 em todo x, teremos:

$$(f \cdot \mathbf{1})(x) = f(x) \cdot \mathbf{1}(x) = f(x), \quad \forall\, x \in \mathcal{D}.$$

3.4.2 Composição de Funções

Consideremos duas funções reais $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ e $f : \mathcal{D}(g) \to \mathbb{R}$ e suponhamos que $\mathcal{I}(f) \subset \mathcal{D}(g)$, isto é, a imagem de f está contida no domínio de g, como ilustra a Figura 3.22.

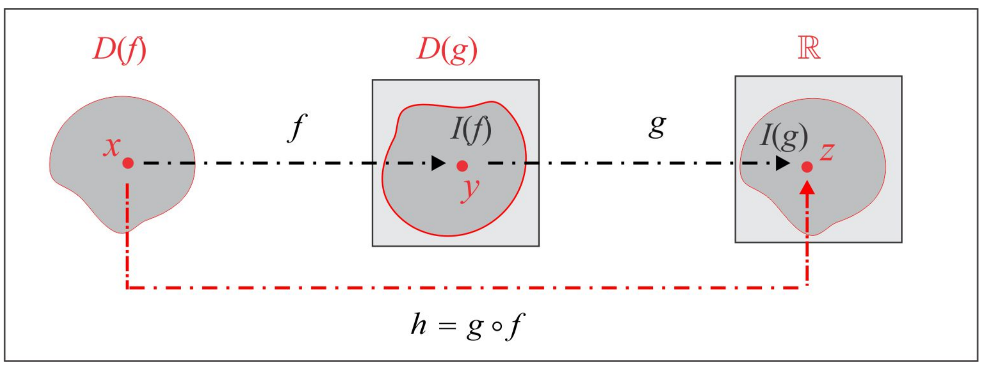


Figura 3.22: Função Composta $h = f \circ g$.

A ilustração sugere a função h, sozinha, fazendo o papel de f e g, ao mesmo tempo. A função h, com mesmo domínio da função f, é a função composta de g com f, é indicada por $g \circ f$ (lê-se g "*bola*" f) e definida pela regra:

$$\boxed{h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in \mathcal{D}(f).} \tag{3.10}$$

EXEMPLO 3.4.1 *Sejam $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x^2 + 1$, ambas definidas em $\mathbb{R}$. Temos que $\mathcal{I}(f) = \mathbb{R}$ e*

$\mathcal{I}(g) = [1, +\infty)$ e as composições $g \circ f$ e $f \circ g$ são possíveis e dadas por:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(x+2) = (x+2)^2 + 1 = x^2 + 4x + 5.\\ (f \circ g)(x) &= f(x^2+1) = (x^2+1) + 2 = x^2 + 3.\end{aligned}$$

EXEMPLO 3.4.2 *Sejam, agora, $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \sqrt{x-1}$, onde temos:*

$$\mathcal{D}\,(f) = \mathbb{R}, \quad \mathcal{D}\,(g) = [1, +\infty), \quad \mathcal{I}\,(f) = [1, +\infty) \quad e \quad \mathcal{I}\,(g) = [0, +\infty).$$

As duas composições $g \circ f$ e $f \circ g$ são possíveis, tendo em vista que $\mathcal{I}(f) \subset \mathcal{D}(g)$ e $\mathcal{I}(g) \subset \mathcal{D}(f)$, e um cálculo direto nos dá:

$$\begin{aligned}(g \circ f)\,(x) &= g\,(f\,(x)) = g\left(x^2 + 1\right) = \sqrt{x^2} = |x| \quad e\\ (f \circ g)\,(x) &= f\,(g\,(x)) = f(\sqrt{x+1}) = (\sqrt{x-1})^2 + 1 = x.\end{aligned}$$

EXEMPLO 3.4.3 *Dada a função $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$, $x \neq 2$, vamos encontrar uma função $x = g(y)$, tal que $(g \circ f)(x) = x$, $\forall\, x \neq 2$.*

Solução: Inicialmente, observamos que a imagem de f é o subconjunto $\mathcal{I}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \neq 1\}$ e resolvendo a equação $y = \dfrac{x}{x-2}$ para explicitar a variável x em função de y, encontramos:

$$x = \frac{2y}{y-1}, \quad y \neq 1.$$

Se considerarmos $g(y) = \dfrac{2y}{y-1}$, teremos:

$$g\,(f\,(x)) = g\left(\frac{x}{x-2}\right) = x, \quad x \neq 2.$$

Notamos que $\mathcal{D}(g) = \mathcal{I}(f)$ e um cálculo direto nos dá $f(g(y)) = y, \quad y \neq 1$.

3.4.3 Invertendo uma Função Real

Um problema interessante do cálculo consiste em inverter uma função real $y = f(x)$, isto é, encontrar, caso exista, uma função real $x = g(y)$, tal que:

$$f\,(g\,(y)) = y \quad \text{e} \quad g\,(f\,(x)) = x, \quad \text{com} \quad x \in \mathcal{D}\,(f) \quad \text{e} \quad y \in \mathcal{D}\,(g)\,.$$

Além disso, é igualmente interessante saber como esboçar o gráfico da função g, a partir do gráfico da função f. Estas questões serão discutidas nesta seção.

DEFINIÇÃO 3.4.4 *Uma função $f : \mathcal{D} \to \mathcal{I}$ é invertível (ou tem inversa) quando existir uma função $g : \mathcal{I} \to \mathcal{D}$, tal que:*

$$g(f(x)) = x \quad e \quad f(g(y)) = y, \quad x \in \mathcal{D},\ y \in \mathcal{I}.$$

Neste caso, a função g é dita inversa de f e frequentemente é representada por f^{-1}. A função inversa f^{-1} não deve ser confundida com o inverso multiplicativo x^{-1} de um número real não nulo. Esse último é o número $1/x$.

► **CRITÉRIO DE INVERTIBILIDADE**

Uma função $f : \mathcal{D} \to \mathcal{I}$ é invertível se, e somente se, for bijetora. A função inversa $g : \mathcal{D} \to \mathcal{I}$ é única e é construída do modo seguinte: dado y em $\mathcal{I}$, definimos $g(y)$ como sendo o único x, no conjunto $\mathcal{D}$, tal que $y = f(x)$. A existência e unicidade de tal x são decorrentes do fato de ser f uma bijeção.

EXEMPLO 3.4.5 *Como vimos no Exemplo 3.3.2,a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $y = f(x) = x^2$ não é bijetora e, portanto, não é invertível. Considerando $f_1 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, definida pela mesma regra $f_1(x) = x^2$, teremos uma bijeção, com inversa $g_1 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, dada por $g_1(y) = \sqrt{y}$. Para chegarmos à expressão que define g, resolvemos a equação $y = x^2$, $x \geq 0$, e obtemos $x = \sqrt{y}$. Se considerássemos a bijeção $f_2(x) = x^2$, $x \leq 0$, a inversa seria $g_2(y) = -\sqrt{y}$.*

► **SOBRE O GRÁFICO DA INVERSA**

A inversa de uma bijeção $f : \mathcal{D} \to \mathcal{I}$ é a bijeção $g : \mathcal{D} \to \mathcal{I}$, com domínio $\mathcal{I}$ e imagem $\mathcal{D}$, tal que:

$$g(f(x)) = x \quad \text{e} \quad f(g(y)) = y,$$

com $x \in \mathcal{D}$ e $y \in \mathcal{I}$. Em cálculo de uma variável real é comum usar a mesma variável independente x, ou qualquer outra letra, tanto na função f quanto na inversa g e com esta convenção temos: $f(g(x)) = x$ e $g(f(x)) = x$.

Para esboçar os gráficos de f e da inversa g no mesmo sistema de coordenadas xOy, observamos que um ponto $A(a, b)$ jaz no gráfico de f se, e somente se, o ponto $B(b, a)$ jaz no gráfico da inversa g, isto porque $b = f(a) \Leftrightarrow a = g(b)$. Assim, os gráficos de f e da inversa g são simétricos em relação à reta $y = x$ (1ª bissetriz).

EXEMPLO 3.4.6 *Consideremos a função* $f_1 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *e sua inversa* $g_1 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *dadas no Exemplo* 3.4.5 *e vejamos os gráficos. O ponto* $A(1, 0)$ *do eixo* x *é transformado, após a reflexão, no ponto* $B(0, 1)$ *do eixo* y. *Na Figura* 3.23 *ilustramos os gráficos das funções* f_1 *e* g_1.

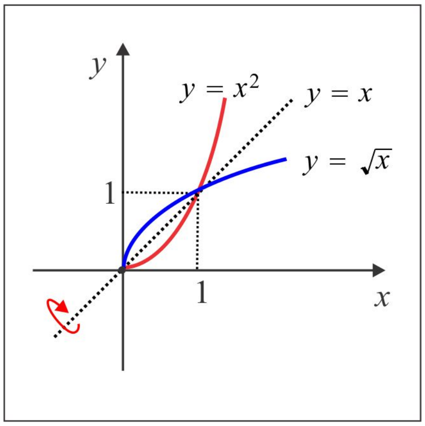


Figura 3.23: Função Inversa

EXEMPLO 3.4.7 *Na Figura* 3.24 *ilustramos os gráficos de duas funções* f_1 *e* f_2 *e suas respectivas inversas* g_1 *e* g_2. *Essas funções serão apresentadas posteriormente e como parte do processo de treinamento, responda as seguintes perguntas partir da leitura do gráfico*:

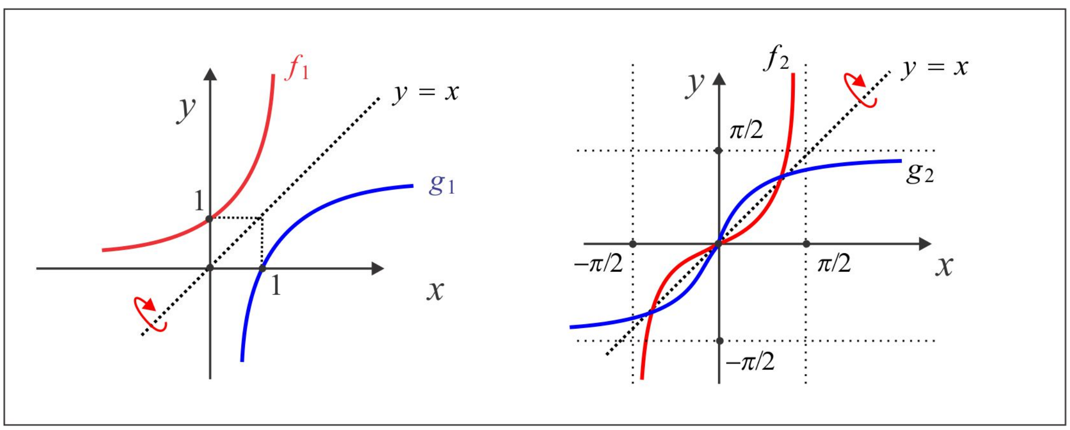


Figura 3.24: Função Inversa

(a) *O gráfico de* f_1 *aproxima-se de alguma reta? E o gráfico de* f_2? *Uma tal reta é conhecida por "reta assíntota" e diremos que o gráfico aproxima-se assintoticamente desta reta.*

(b) *g_1 ou g_2 tem assíntota?*

(c) *Calcule os limites:* $\lim_{x\to\pm\infty} g_2(x)$.

(d) *Qual o domínio de f_2? E a imagem de g_2 quem é?*

(e) *Como se comporta f_2 próximo de $\pm\pi/2$?*

(f) *Se convenceu da importância do gráfico?*

► **ESCREVENDO PARA APRENDER 3.4**

1. Em cada caso, verifique que $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Dom}(g)$ e determine a função composta $h = g \circ f$.

   (a) $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

   (b) $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

   (c) $f(x) = -\sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$.

   (d) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ e $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

2. Determine a função f de modo que $(g \circ f)(x) = x, \quad \forall x \in \mathcal{D}(f)$, onde:

   (a) $g(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$, $x > -1$ (b) $g(x) = x^2 - 2x$, $x \geq 1$.

3. Considere f uma função par e seja $h = g \circ f$. Mostre que h é uma função par. E se f for uma função ímpar, pode-se afirmar que h também o será?

4. Classifique as funções abaixo quanto a limitação.

   (a) $f(x) = x^2$ (b) $f(x) = x^2,\ 0 \leq x \leq 2$ (c) $g(x) = x^3,\ -1 \leq x \leq 2$ (d) $f(x) = 1/x,\ x < 0$.

5. Considere a função $f(x) = k/x$, onde k é uma constante. É necessário impor alguma restrição à constante k para que f seja invertível? Quem é f^{-1}?

6. Considere $f : [1/2, +\infty) \to [b, +\infty)$ definida por $f(x) = x^2 - x + 1$. Qual o valor de b que torna f invertível? Quem é f^{-1}? Esboce o gráfico de f^{-1}.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

ESCREVENDO PARA APRENDER 3.1

1. As funções apresentadas em (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), (h), (j) e (l) têm para domínio o conjunto $\mathbb{R}$ dos numeros reais. Por outro lado, temos:

   (i) $\mathbb{R} - \{1\}$ e $h(x) = x + 1$, se $x \neq 1$.

   (k) $\mathbb{R} - \{-1/2\}$.

   (m) $\mathbb{R} - \{0\}$.

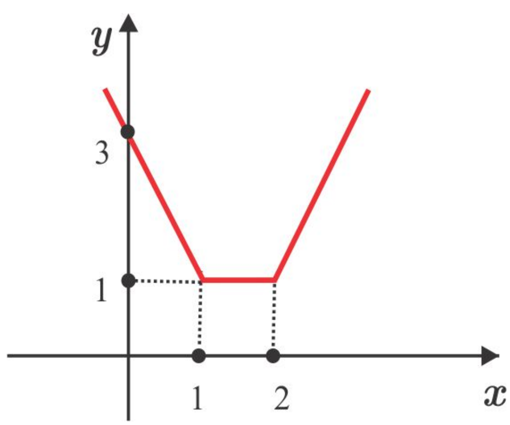
   (n) $\mathbb{R} - \{1\}$.

   (o) $\mathbb{R} - \{-1\}$ e $g(x) = x - 1$, se $x \neq -1$.

2. Considere as possibilidades:

   - $x \leq 1$, onde tem-se $|x-1| + |x-2| = (-x+1) + (-x+2) = -2x + 3$.
   - $1 < x < 2$, onde tem-se $|x-1| + |x-2| = x - 1 + (-x+2) = 1$.
   - $x \geq 2$, onde tem-se $|x-1| + |x-2| = x - 1 + x - 2 = 2x - 3$.

   Veja o gráfico na figura abaixo.



3. Nas descrições abaixo, anotamos $\mathbb{R} - \{a\}$ para indicar o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x \neq a\}$.

(a) $\mathbb{R}-\{1\}$ ou $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ ou $\{x\in\mathbb{R}: x\neq 1\}$.

(b) $\mathbb{R}-\{-1,1\}=\{x\in\mathbb{R}: x\neq -1 \text{ e } x\neq 1\}$.

(c) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}: x\leq -1 \text{ ou } x\geq 1\}$.

(d) $\mathbb{R}-\{-2\}$ ou $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

(e) $[-2,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}: x\geq -2\}$.

(f) $\mathbb{R}-\{-1,0\}=\{x\in\mathbb{R}: x\neq -1 \text{ e } x\neq 0\}$.

(g) $(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$.

(h) $(-\infty,-3)\cup[0,+\infty)$.

(i) $\mathbb{R}$ ou $(-\infty,+\infty)$.

(j) $[0,2/3]$.

(k) $(1/3,1/2]$.

(l) $(-\infty,-2)\cup[3,+\infty)$.

(m) $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

(n) $[-2,2]$.

(o) $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}: x\neq -1\}$.

(p) $\left\{x\in\mathbb{R}: -\sqrt{5/2}\leq x\leq\sqrt{5/2}\right\}=[-\sqrt{5/2},\sqrt{5/2}]$.

(q) $[1,3]$.

(r) $[0,1]$.

(s) $[0,5/2]$.

(t) $[1,+\infty)\cup\{0\}$.

4. R$ 2.000,00.

5. $\mathcal{D}(f)=(-\infty,-11/2]\cup[-5/6,+\infty)$.

6. No intervalo $-3\leq x\leq 2$, temos

$$0\leq\left|x^3-2x^2+3x-4\right|\leq|x|^3+\left|2x^2-3x+4\right|\leq 27+31=58.$$

7. Efetuar o completamento do quadrado.

   (a) $x^2 + 4x + 5 = \left(x^2 + 4x + 4\right) + 1 = (x+2)^2 + 1$

   (b) Uma parábola com vértice no ponto $V(-2, 1)$

   (c) O menor valor de f é 1 e ocorre em $x = -2$.

8. Temos:
$$\sqrt{1+x^2} - |x| = \left(\sqrt{1+x^2} - |x|\right) \frac{\sqrt{1+x^2} + |x|}{\sqrt{1+x^2} + |x|} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + |x|}.$$

9. (a) $y = \sqrt{4 - x^2}$ (b) $[-2, 2]$.

10. $S(x) = x^2 + 8/x$.

11. $T(h) = -10h + 20;\quad T(2,5) = -5^0 C$.

12. Leitura do gráfico.

    (a) -4 (b) não (c) $x = -3,\ x = 1$ e $x = 3$ (d) Para dois valores (e) $[-3, 3]$ (f) $[-4, 4]$.

13. Leitura do gráfico.

    (a) $f(-4) = -4;\quad g(3) = 3$.

    (b) $x = 2,\quad x = -2$.

    (c) $\text{Dom}(f) = [-4, 7/2]$ e $\text{Im}(f) = [-4, 2]$.

    (d) $\text{Dom}(g) = [-7/2, 7/2]$ e $\text{Im}(g) = [-5/2, 7/2]$.

    (e) Dois valores.

    (f) Dois valores.

ESCREVENDO PARA APRENDER 3.3

1. Recorde-se que uma função f definida em um intervalo simétrico será par quando $f(x) = f(-x),\ \forall\, x$, e será ímpar quando $f(-x) = -f(x),\ \forall\, x$.

   (a) ímpar (b) par (c) nem par nem ímpar (d) par (e) par.

2. Mostre que $g(x) = g(-x)$ e $h(-x) = -h(x)$. Para concluir, observe que
$$f(x) = g(x) + h(x).$$

3. Mais uma vez tenha em mente os conceitos de função par e função ímpar.

   (a) Dado que f e g são funções pares, então $f(-x) = f(x)$ e $g(-x) = g(x)$ e, assim,
   $$[f+g](-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = [f+g](x).$$

   (b) Se f e g são ímpares, então o produto $f \cdot g$ é par. De fato,
   $$[f \cdot g](-x) = f(-x) \cdot g(-x) = [-f(x)] \cdot [-g(x)] = [f \cdot g](x).$$

   (c) Se f é par e g é impar, então o produto $f \cdot g$ é ímpar. De fato,
   $$[f \cdot g](-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot [-g(x)] = -[f \cdot g](x).$$

4. As funções f e g são iguais apenas no caso (b).

5. $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$.

6. As conclusões podem ser deduzidas a partir da ilustração gráfica. A função f é crescente no intervalo $[0, +\infty)$ e decrescente em $(-\infty, 0]$. A função g cresce no intervalo $[1, +\infty)$ e decresce em $(-\infty, 1]$.

7. Se $a > 0$ e $x_1 < x_2$, então $ax_1 + b < ax_2 + b$ e a função afim é crescente.

8. A função f é crescente no intervalo $[0, 3]$.

9. Existem várias opções. Por exemplo, $f(x) = |x|$ e $g(x) = 1/x$, se $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ e $g(0) = 0$.

10. (a) $|g(x)| \leq 8$ (b) $|g(x)| \leq 1/2$ (c) $|g(x)| \leq 8$.

11. Considere $f(x) = 1/x,\ x > 0$, e $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ a função definida por:
$$g(x) = \left| \begin{array}{ll} 1/x, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{array} \right.$$

    Observe que $g(x)$ assume valores arbitrariamente grandes, quando x é positivo e próximo de zero, e valores arbitrariamente pequenos, quando x é negativo e próximo de zero.

ESCREVENDO PARA APRENDER 3.4

1. (a) $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Dom}(g) = [0, +\infty)$ e $h(x) = |x|$.

   (b) $\operatorname{Im}(f) = [3, +\infty) \subset \operatorname{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{2\}$ e $h(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2+1}$.

   (c) $\operatorname{Im}(f) = (-\infty, 0) \subset \operatorname{Dom}(g) = (-\infty, 2]$ e $h(x) = \sqrt{2+\sqrt{x}}$, $x > 0$.

   (d) $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{1\}$ e $h(x) = -2x - 1$, $x \neq -1$.

2. (a) $f(x) = \dfrac{x-2}{1-x}$.

   (b) $f(x) = 1 + \sqrt{1+x}$.

3. Se f é par, então $f(-x) = f(x)$ e, sendo assim,

$$h(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = h(x).$$

   Logo, $h(x)$ é uma função par. Podemos concluir que h é uma função ímpar, se f e g o forem.

4. (a) Limitada inferiormente.

   (b) Limitada.

   (c) Limitada.

   (d) Limitada Superiormente.

5. $k \neq 0$ e $f^{-1} = f$.

6. $b = 3/4$. A inversa é a função $g : [3/4, +\infty) \to [1/2, +\infty)$, definida por $g(y) = \frac{1}{2} + \sqrt{y - 3/4}$.

Aprendemos a determinar a reta tangente a uma circunferência, utilizando argumentos de geometria elementar. A reta tangente a uma circunferência no ponto A é a reta que passa no ponto A e é ortogonal ao raio por esse mesmo ponto. Essa reta tangente toca a circunferência apenas no ponto A. No caso de uma curva qualquer γ, o que seria o raio? A reta tangente pode tocar a curva em mais de um ponto?

► UM PROBLEMA TÍPICO DO CÁLCULO Seja $A(a, f(a))$ um ponto da curva γ, identificada como o gráfico de uma função $y = f(x)$. Como encontrar a equação da reta tangente à curva γ, no ponto A?

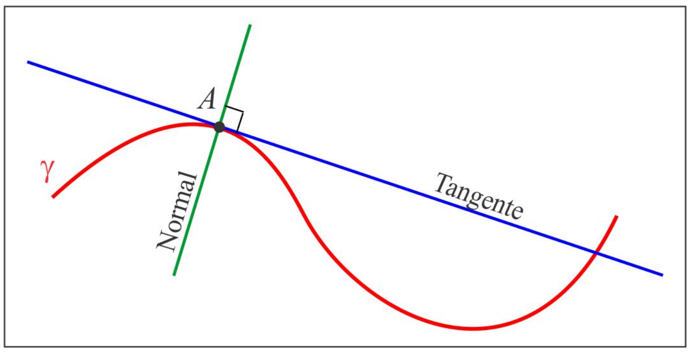


Figura 4.1: Ilustração das Retas Tangente e Normal.

Como já temos o ponto de tangência A, resta-nos buscar a declividade m_T da reta tangente. A reta normal à curva γ pelo ponto A é ortogonal à reta tangente nesse ponto, como ilustra a Figura 4.1, e se m_N e m_T são as respectivas declividades, então $m_T \cdot m_N = -1$. Dessa forma encontramos as equações das retas tangente e normal, na forma simplificada:

$$\begin{array}{ll} \text{reta tangente:} & y = f(a) + m_T(x - a) \\ \text{reta normal:} & y = f(a) + m_N(x - a). \end{array}$$

4.1 Declividade da Reta Tangente

Na Figura 4.2 ilustramos a reta tangente a uma curva γ, no ponto $A(a, f(a))$, e sobre a curva γ consideramos um ponto $B(b, f(b))$, com $b = a + \Delta x, \quad \Delta x \neq 0$. A medida que $\Delta x \to 0$, o ponto

$b = a + \Delta x \to a$, sobre o eixo x e, consequentemente, o ponto B desliza sobre a curva γ em direção ao ponto de tangência A.

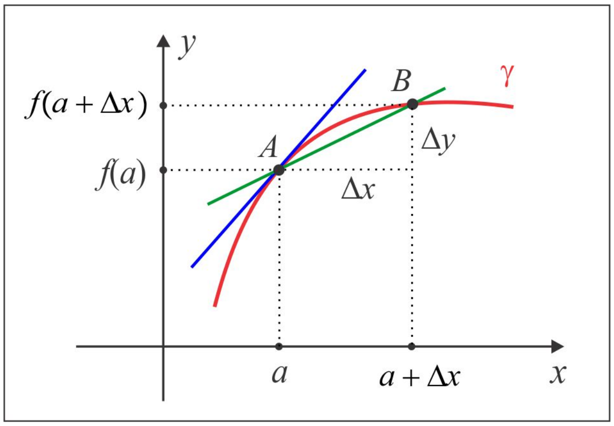


Figura 4.2: Declividade da Reta Tangente.

A declividade da reta que passa pelos pontos A e B é dada por $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, isto é:

$$\boxed{m_{AB} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x},} \tag{4.1}$$

e à medida que $\Delta x \to 0$ o ponto B aproxima-se do ponto A e é razoável definir a declividade da reta tangente pelo valor limite, caso o limite exista, das declividades m_{AB}, isto é:

$$\boxed{m_T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}.} \tag{4.2}$$

▶ **ALGUNS COMENTÁRIOS**

(i) No caso em que o limite em (5.18) exista, é comum, por simplicidade, usar h no lugar do incremento Δx, de modo que a declividade m_T da reta tangente é calculada pelo limite:

$$\boxed{m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.}$$

(ii) Considerando que $\Delta x = x - a$, a declividade m da reta tangente também pode ser calculada pelo limite:

$$\boxed{m_T = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.}$$

no caso do limite existir.

(iii) Em cálculo, expressões do tipo:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty^0, \quad 1^\infty, \quad 0 \times \infty \quad \text{e} \quad \infty - \infty \tag{4.3}$$

não tem significado real algum e recebem o nome, bem sugestivo, de "formas indeterminadas".

(iv) No quociente de Newton

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

a substituição direta de h por 0 nos conduz à forma indeterminada $0/0$. Antes da substituição de h por 0, devemos simplificar o quociente de Newton, de modo que a substituição do incremento h por 0 não produza uma forma indeterminada e assim teremos a resposta para o valor do limite, caso o limite exista.

OBSERVAÇÃO 4.1.1 (Existência do Limite) *Sobre a existência do limite é oportuno ressaltar a importância dos limites laterais.*

Para que uma função $y = f(x)$ tenha limite no ponto $x = a$ é necessário e suficiente que os limites laterais $f(a^+)$ e $f(a^-)$ existam e sejam iguais.

Dito isto, se os limites laterais do quociente de Newton, com $h \to 0^+$ e $h \to 0^-$, são distintos, então a reta tangente no ponto $A(a, f(a))$ do gráfico de f não está definida.

EXEMPLO 4.1.2 *Encontrar a reta tangente e a reta normal à curva $y = x^2$, no ponto $A(1,1)$.*

Solução: O ponto de tangência é $A(1,1)$ e o quociente de Newton é, neste caso:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h.$$

A declividade da reta tangente é, portanto:

$$m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2$$

e a reta normal tem declividade $m_N = -1/2$, já que $m_N = -1/m_T$. Assim, temos:

(i) Equação da reta tangente: $y = 1 + 2(x - 1) \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0.$

(ii) Equação da reta normal: $y = 1 + (-1/2)(x - 1) \Leftrightarrow x + 2y + 1 = 0.$

EXEMPLO 4.1.3 *Encontrar a reta tangente ao gráfico da função* $y = \dfrac{x-1}{2x-3}$*, no ponto* $A(2, 1)$.

Solução: Como $y = f(x) = \dfrac{x-1}{2x-3}$, segue que $f(2) = 1$ e o quociente de Newton, neste caso, vem dado por:

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{1}{h}\left[\frac{(2+h)-1}{2(2+h)-3} - 1\right] = \frac{1}{h}\left(\frac{h+1}{2h+1} - 1\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{h+1-2h-1}{2h+1}\right) = -\frac{1}{2h+1}$$

e a declividade da reta tangente é:

$$m_T = \lim_{h \to 0}\left(\frac{-1}{2h+1}\right) = -1.$$

A reta tangente é descrita pela equação: $y = 1 + (-1)(x - 2)$, isto é, $x + y = 3$ e para o esboço do gráfico, é aconselhável expressar a função sob a forma padrão:

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1/4}{x - 3/2}.$$

Na Figura 4.3 ilustramos a situação gráfica.

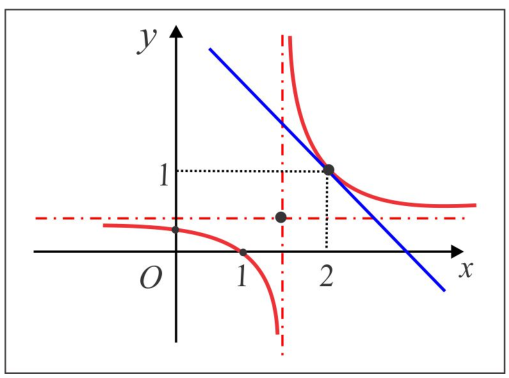


Figura 4.3: Ilustração do Exemplo 4.1.3

4.1.1 Limite × Continuidade

Recordemos que uma função f tem limite no ponto $x = a$, se os limites laterais de f neste ponto forem iguais. O valor comum L dos limites laterais é o limite da função f no ponto a e anotamos:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L.}$$

É oportuno ressaltar que o cálculo do limite de uma função f em um ponto a pode ser investigado, mesmo que a função f não esteja definida neste ponto. É necessário, contudo, que ela esteja definida nas proximidades do ponto a, isto é, em um intervalo contendo a no seu interior, exceto, possivelmente, no ponto a.

EXEMPLO 4.1.4 *O domínio e a imagem da função $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, definida por:*

$$\left| \begin{array}{ll} \sqrt{x}, & se \quad 0 < x \leq 2 \\ 1, & se \quad -2 \leq x < 0 \\ x+3, & se \quad -4 \leq x \leq -2 \end{array} \right.$$

são, respectivamente, $\mathcal{D} = [-4, 0) \cup (0, +\infty)$ e $\mathcal{I} = [-1, \sqrt{2}]$. O ponto $x = 0$ não faz parte do domínio de f, mas, com a ajuda do gráfico de f ilustrado na Figura 4.4, investigamos como se comporta a função próximo da origem.

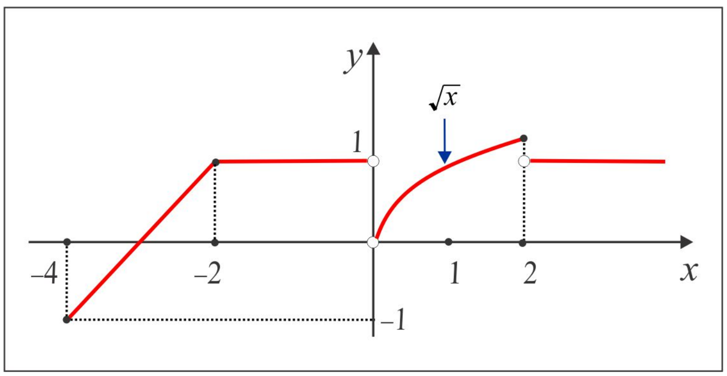


Figura 4.4: Função do Exemplo 4.1.4

Observando o gráfico, deduzimos que:

(i) *Os limites laterais de f, à esquerda e à direita, em $x = -2$ são iguais a 1 e, portanto, $\lim_{x \to -2} = 1$.*

(ii) *No ponto $x = 0$ a função não está definida, mas, os limites laterais existem e são distintos: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$. A função f não tem limite no ponto $x = 0$.*

(iii) *No ponto $x = 2$ a função não tem limite. Nesse ponto, o limite lateral à direita é igual a 1, enquanto o limite lateral à esquerda é igual a $\sqrt{2}$.*

DEFINIÇÃO 4.1.5 *Uma função $y = f(x)$ é contínua no ponto $x = a$ quando as seguintes condições forem verificadas*:

(a) *O ponto a pertence ao domínio de f, isto é, o valor $f(a)$ está definido.*

(b) *f tem limite no ponto $x = a$ e $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

EXEMPLO 4.1.6 *A função polinomial $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ é contínua em qualquer ponto do eixo real. De fato, neste caso o limite é calculado por substituição direta de x por a e temos*:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) = Aa^3 + Ba^2 + Ca + D = f(a).$$

(*aqui usamos propriedades do limite que serão estabelecidas na Seção* 4.2.)

EXEMPLO 4.1.7 *Analisemos a continuidade da função $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, definida por*:

$$\left|\begin{array}{l} \sqrt{-x}, \quad se \quad -1 \le x \le 0 \\ 1, \quad se \quad x > 1 \quad e \quad x \neq 2 \\ x^2, \quad se \quad 0 \le x < 1 \\ 2, \quad se \quad x = 2. \end{array}\right.$$

A partir do gráfico ilustrado na Figura 4.5, vemos que:

(i) *O domínio de f é o conjunto $\mathcal{D} = [-1, 1) \cup (1, +\infty)$ e a imagem é $\mathcal{I} = [0, 1] \cup \{2\}$.*

(ii) *f é descontínua (não contínua) em $x = 1$, porque f não está definida nesse ponto, isto é, $1 \notin \mathcal{D}$.*

(iii) *Embora f esteja definida e tenha limite no ponto $x = 2$, ela é descontínua nesse ponto porque, $\lim_{x\to 2} f(x) = 1 \neq f(2)$.*

(iv) *Nos demais pontos do seu domínio f é contínua.*

OBSERVAÇÃO 4.1.8 (Continuidade das Funções Elementares) *Não parece óbvio, embora seja verdadeiro, que todas as funções elementares do cálculo são contínuas em seus respectivos domínios; também é contínua a composição de funções contínuas. A função $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ pode ser vista como composição das funções contínuas: $t \longmapsto \sqrt{t}$, $t \ge 0$, e $x \longmapsto x^2 + 1$. Outro fato que merece atenção é a continuidade da função inversa: uma bijeção contínua $f : [a, b] \to [c, d]$ é monótona e a inversa $g : [c, d] \to [a, b]$ é também contínua e monótona. Uma função racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ é contínua em qualquer ponto $x = a$, para o qual $q(a) \neq 0$.*

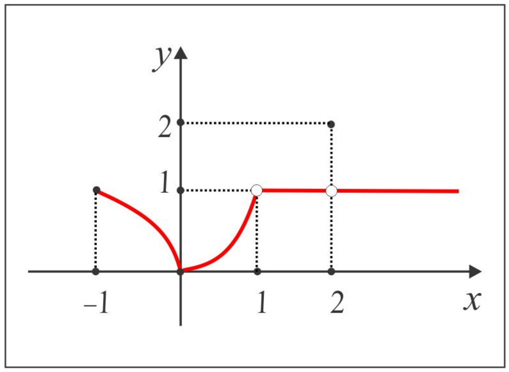


Figura 4.5: Função do Exemplo 4.1.7

Para finallizar esta seção apresentamos, sem demonstração, o 1º Teorema Clássico do Cálculo, com consequências bem relevantes. A Figura 4.6 ilustra o resultado.

TEOREMA 4.1.9 (Teorema do Valor Intermediário - TVI) *Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida e contínua no intervalo $[a, b]$, assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$. Em outras palavras, dado um valor y_0 entre $f(a)$ e $f(b)$, existe ao menos um valor x_0 entre a e b, tal que $f(x_0) = y_0$.*

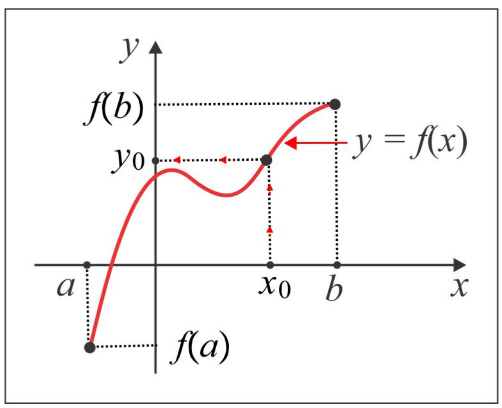


Figura 4.6: Valor Intermediário.

COROLÁRIO 4.1.10 *Se uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ assume um valor negativo e um valor positivo, então a função f assume o valor zero, isto é, existe x_0 no intervalo $[a, b]$, tal que $f(x_0) = 0$.*

EXEMPLO 4.1.11 *Para comprovar que o polinômio $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2$ tem uma raiz entre -1 e 1, basta observar que $f(-1) = -4 < 0$ e $f(1) = 2 > 0$ e a conclusão segue do Corolário 4.1.10.*

▶ ESCREVENDO PARA APRENDER 4.1

1. Verdadeiro (V) ou Falso (F)?

   (a) Se $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$, então f é contínua em $x = a$.

   (b) Se $\lim_{x\to a} |f(x)|$ existe, então $\lim_{x\to a} f(x)$ também existe.

   (c) Se $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$, então $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

2. Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$, onde a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$f(x) = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 3, & \text{se} \quad x = 1 \end{array} \right. .$$

   Esta função é contínua em $x = 1$?

3. Seja f uma função real contínua, definida em torno do ponto $a = 1$, tal que $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$, para $x \neq 1$. Quanto vale $f(1)$? Por quê?

4. Em cada caso, determine o valor de k, de modo que a função $f(x)$ seja contínua no ponto a indicado.

   (a) $a = 2; \quad f(x) = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{x^3-8}{x-2}, & \text{se} \quad x \neq 2 \\ k, & \text{se} \quad x = 2 \end{array} \right.$ (b) $a = 3; \quad f(x) = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}, & \text{se} \quad x > 0 \text{ e } \neq 3. \\ k, & \text{se} \quad x = 3 \end{array} \right.$

5. Seja f a função definida por: $f(-1) = 2$ e $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x+1}$, para $x \neq -1$. A função f é contínua no ponto $x = -1$? Por quê? E no ponto $x = 0$?

6. Dê exemplo de uma função f, definida em $\mathbb{R}$, descontínua no ponto $x = 2$, mas que satisfaça $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$.

7. Esboce o gráfico e encontre os pontos de descontinuidade da função f, definida por:

$$f(x) = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{2x^2+3}{5}, & \text{se} \quad x \leq 1 \\ 6-5x, & \text{se} \quad 1 < x < 3 \\ x-3, & \text{se} \quad x \geq 3. \end{array} \right.$$

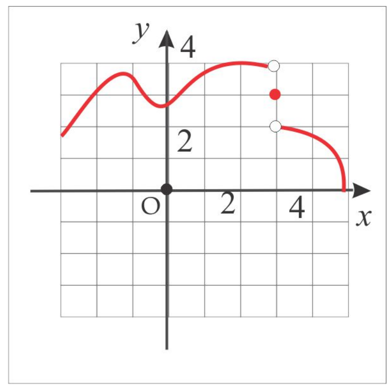
8. Em cada caso, esboce o gráfico da função e diga se ela é contínua no ponto a indicado.

(a) $a = 0$; $f(x) = \begin{vmatrix} 2 - x, & \text{se} \quad x > 1 \\ x^2, & \text{se} \quad x \leq 1 \end{vmatrix}$ (b) $a = 0$; $f(x) = \begin{vmatrix} \dfrac{x-2}{|x-2|}, & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 1, & \text{se} \quad x = 2 \end{vmatrix}$

(c) $a = -1$; $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$ (d) $a = 1$; $f(x) = \begin{vmatrix} 0, & \text{se} \quad x < 0 \\ [x], & \text{se} \quad x \geq 0 \end{vmatrix}$

No Exercício 8(d), $[x]$ representa o *maior inteiro menor ou igual a* x e a função correspondente $x \longmapsto [x]$ é denominada *função escada.*

9. Seja f a função cujo gráfico encontra-se esboçado abaixo.
   (a) Calcule $\lim_{x \to 0} f(x)$.
   (b) Calcule $\lim_{x \to 3} f(x)$.
   (c) Calcule $f(0)$.
   (d) Calcule $f(3)$.
   (e) f é contínua no ponto $x = 0$?
   (f) f é contínua no ponto $x = 3$?



10. Existe um número real α capaz de fazer com que $\lim_{x \to -2} \dfrac{3x^2 + \alpha x + \alpha + 3}{x^2 + x - 2}$ exista?

11. Uma companhia ferroviária cobra R\$10 por km, para transportar um vagão até uma distância de $200km$, cobrando ainda R\$8 por cada km que exceda a 200. Além disso, essa mesma companhia cobra uma taxa de serviço de R\$1.000 por vagão, independentemente da distância a percorrer. Determine a função que representa o custo para transportar um vagão a uma distância de x km e esboce seu gráfico. Essa função é contínua em $x = 200$?

12. Uma fábrica é capaz de produzir 15.000 unidades de um certo produto, em um turno de 8 horas de trabalho. Para cada turno de trabalho, sabe-se que existe um custo fixo de $R\$ \ 2.000,00$, relativo ao consumo de energia elétrica. Supondo-se que, por unidade produzida, o custo variável, dado o gasto com matéria prima e salários, é de $R\$ \ 2,00$, determine a função que representa o custo total para a fabricação de x unidades e esboce seu gráfico. A função encontrada é contínua para $0 \leq x \leq 45.000$?

13. Um estacionamento cobra $R\$$ 3 pela primeira hora, ou parte dela, e $R\$$ 2 por hora sucessiva, ou parte dela, até o máximo de R\$10. Esboce o gráfico do custo do estacionamento como uma função do tempo decorrido e analise as descontinuidades dessa função.

14. Prove que a equação $x^5 + x + 1 = 0$ tem ao menos uma raiz no intervalo $[-1, 0]$.

15. Prove que a equação $x^3 - 4x + 2 = 0$ admite três raízes reais e distintas.

16. Considere a função $y = f(x)$, definida por:

$$f(x) = \left| \begin{array}{lll} x^2 + 2, & \text{se} & -2 \le x < 0 \\ -x^2 - 2, & \text{se} & 0 \le x \le 2. \end{array} \right.$$

Mostre que f não tem raiz no intervalo $[-2, 2]$. Isto contradiz o Corolário 4.1.10 do TVI?

17. Explique por que os limites abaixo não existem.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x+3}{(x-1)(x+2)}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+3}{x}$.

18. Sobre a função $y = f(x)$ da figura abaixo, quais afirmações são verdadeiras?

(a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe.

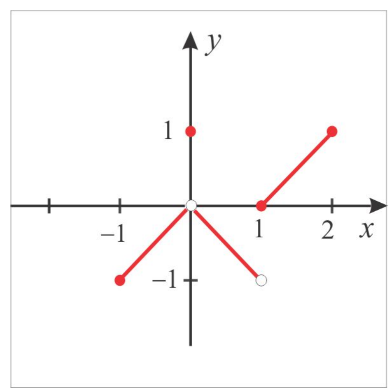
(b) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

(c) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

(d) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

(e) $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$.

(f) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe no ponto a em $(-1, 1)$.



4.2 Conceito, Propriedades & Cálculo de Limites

Calcular o limite de uma função $y = f(x)$, no ponto $x = a$, nada mais é do que estudar como se comporta a função f nas proximidades de $x = a$. Isto pode ser feito diretamente na expressão que define $f(x)$ como também através do gráfico da função. Intuitivamente, dizemos que $f(x)$ tem limite L, com $x \to a$, se os valores $f(x)$ aproximam-se arbitrariamente do número L, à medida que x, no domínio de f, aproxima-se arbitrariamente do número a. Em símbolos, escrevemos:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L} \tag{4.4}$$

para indicar que $|f(x) - L| \to 0$ sempre que $x \in D(f)$, com $|x - a| \to 0$.

EXEMPLO 4.2.1 (Motivando o conceito de limite) *Dada* $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, *vamos encontrar um raio* $\delta > 0$, *tal que* $|f(x) - 2| < 0.02$, *sempre que* $|x - 1| < \delta$, $x \neq 1$.

Solução: Por meio de equivalências, vamos simplificar a premissa $|f(x) - 2| < 0.02$. Temos:

$$\left|\frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2\right| < 0.02 \Leftrightarrow \left|\frac{x^2 - 1 - 2x + 2}{x - 1}\right| < 0.02 \Leftrightarrow \left|\frac{(x-1)^2}{x - 1}\right| < 0.02 \Leftrightarrow |x - 1| < 0.02 \tag{4.5}$$

e a última desigualdade em (4.5) sugere escolher o número δ, tal que $0 < \delta \leq 0.02$. Por exemplo, escolhendo $\delta = 0.01$, então:

$$|x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 1| < 0.02 \Rightarrow |f(x) - 2| < 0.02.$$

4.2.1 Conceito de Limite

Embora o cálculo de limites seja feito por meio de regras, achamos conveniente apresentar o conceito formal de limite, o qual servirá de embasamento teórico para a comprovação das regras e propriedades do limite. Para tanto, dixe-nos considerar $y = f(x)$ uma função real definida em um intervalo I, contendo o ponto a no seu interior, exceto, possivelmente, no ponto $x = a$, como sugere a Figura 4.7.

DEFINIÇÃO 4.2.2 *Dizemos que a função* $y = f(x)$ *tem limite* L, *com* $x \to a$, *se a condição seguinte for satisfeita*:

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \textit{tal que}\ x \in D(f)\ \ e\ \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.} \tag{4.6}$$

► **SOBRE A DEFINIÇÃO DE LIMITE**

(i) Na definição de limite, o δ encontrado depende, em geral, do ε dado.

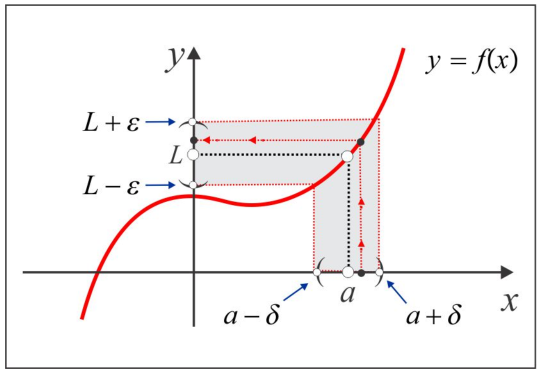


Figura 4.7: Conceito de Limite.

(ii) No caso em que f é uma função constante, digamos $f(x) = k$, $\forall\, x$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k$ e o mesmo δ atende à definição, para qualquer ε, já que $|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon, \quad \forall\, x$.

(iii) A partir das equivalências:

(a) $|x - a| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x - a < \delta \Leftrightarrow x \in (a - \delta, a + \delta)$ e

(b) $|f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

segue da definição que: se $x \in (a - \delta, a + \delta)$ e $x \neq a$, então $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

(iv) Se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M \neq 0$ e na definição de limite escolhemos $\varepsilon = |M|/2$, encontramos $\delta > 0$, tal que:

$$\big||g(x)| - |M|\big| < |g(x) - M| < |M|/2 \Rightarrow -|M|/2 < |g(x)| - |M| < |M|/2,$$

com $|x - a| < \delta$ e daí resultam as desigualdades:

$$|M|/2 < |g(x)| < 3|M|/2, \quad \forall\, x \in (a - \delta, a + \delta), \quad x \neq a. \tag{4.7}$$

De (4.7) segue que g é limitada nas proximidades do ponto $x = a$.

(v) Uma função $y = f(x)$ não pode ter dois limites no mesmo ponto $x = a$. De fato, se tivéssemos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = M$, então, dado qualquer $\varepsilon > 0$, teríamos

$$|f(x) - L| < \varepsilon/2 \quad \text{e} \quad |f(x) - M| < \varepsilon/2,$$

para x arbitrariamente próximo do ponto a, e, consequetemente:

$$|L - M| = |L - f(x) + f(x) - M| \leq |f(x) - L| + |f(x) - M| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \tag{4.8}$$

De (4.8) e da arbitrariedade do $\varepsilon > 0$, segue que $L = M$ e temos a unicidade do limite.

4.2.2 Propriedades do Limite

As seguintes propriedades do limite podem ser comprovadas a partir da Definição 4.2.2 e das propriedades do valor absoluto. Como ilustração, apresentaremos, de forma breve, algumas demonstrações. Sejam f e g duas funções definidas no mesmo domínio, com: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$.

► LIMITE DA SOMA: $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\big[f(x) + g(x)\big] = L + M.}$

Prova: Considerando que $|f(x) - L|$ e $|g(x) - M|$ aproximam-se de zero, com $x \to a$, temos:

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \to 0 + 0 = 0.$$

► LIMITE DO PRODUTO: $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\big[f(x) \cdot g(x)\big] = L \cdot M.}$

Prova: Temos que:

$$|f(x)g(x) - LM| = |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| \leq |g(x)||f(x) - L| + |L||g(x) - M|$$

e usando (4.7) temos $|g(x)| < 3|M|/2$ e, portanto, $|f(x) \cdot g(x) - L \cdot M| \to 0$. Em particular, se k é uma constante, então $\lim\limits_{x\to a} [k \cdot f(x)] = k \cdot L$.

► LIMITE DO INVERSO: $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{1}{g(x)}\right] = \dfrac{1}{M}, \quad M \neq 0.}$

Prova: Naturalmente, estamos supondo $g(x) \neq 0$, próximo de $x = a$. De (4.7), segue a desigualdade $|1/g(x)| < 2/|M|$, para $|x - a| < \delta$, e, portanto:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \frac{|g(x) - M|}{|g(x)||M|} < \left(\frac{2}{M^2}\right)|g(x) - M| \to 0.$$

► LIMITE DO QUOCIENTE: $\boxed{\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{L}{M},\ M\neq 0.}$

Prova: Consequência de (P2) e (P3):

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=|f(x)|\left|\frac{1}{g(x)}\right|\to L\cdot\frac{1}{M}=\frac{L}{M}.$$

► LIMITE DO MÓDULO: $\boxed{\lim_{x\to a}|f(x)|=|L|.}$

Prova: Consequência direta da desigualdade $\big||A|-|B|\big|\leq|A-B|$:

$$\big||f(x)|-|L|\big|\leq|f(x)-L|\to 0.$$

► LIMITE NO CONFRONTO: Se $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=L$ e $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$, $\forall x$, então:

$$\boxed{\lim_{x\to a}h(x)=L.}$$

Prova: Admitindo a existência do limite, temos:

$$f(x)-L\leq h(x)-L\leq g(x)-L,$$

e fazendo $x\to a$, notando que $f(x)-L$ e $g(x)-L$ aproximam-se de zero, segue o resultado.

Como consequência da propriedade do confronto, temos:

COROLÁRIO 4.2.3 *Se a função f é limitada nas proximidades do ponto $x=a$, isto é, existe uma constante C, tal que $|f(x)|\leq C$, $\forall x$, e $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$, então o produto $f(x)\cdot g(x)$ tem limite zero, quando $x\to a$, mesmo que a função f não tenha limite no ponto a.*

Prova: Basta observar que:

$$0\leq|f(x)\cdot g(x)|\leq C\cdot|g(x)|\to C\cdot 0=0.$$

Fique Alerta! Os conceitos de "ser limitada" e "ter limite" são distintos. Uma função pode ser limitada e não ter limite num ponto. Por exemplo, a função $f(x)=|x|/x$, $x\neq 0$, é limitada, mas, não tem limite na origem. Do ponto de vista gráfico, uma função ser limitada significa que seu gráfico jaz na faixa delimitada por duas retas horizontais $y=\pm k$.

4.2.3 Calculando Limites

O cálculo do limite em um ponto $x = a$ será feito com auxílio das propriedades e artifícios. É bom ter em mente as formas indeterminadas (4.3), porque elas indicam que alguma operação preliminar deve ser efetuada. Na sequência apresentamos alguns exemplos como ilustração.

EXEMPLO 4.2.4 *Calcular, caso exista, o limite*:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}\right)$$

Solução: Ao tentar substituir x por 2, chegamos à forma indeterminada $0/0$. Para eliminar a indeterminação, multiplicamos o numerador e o denominador por $\sqrt{x}+\sqrt{2}$, *conjugado de* $\sqrt{x}-\sqrt{2}$, e obtemos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}\right) &= \lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right) = \lim_{x\to 2}\left[\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}\right]\\ &= \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right) = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{2}}.}\end{aligned}$$

No último limite efetuamos a substituição de x por 2, para chegarmos à resposta.

EXEMPLO 4.2.5 *Calcular* $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-x}{x^2-x}\right)$.

Solução: Mais uma vez a substituição direta de x pelo ponto limite -1 nos conduz à indeterminação $0/0$. Simplificando a expressão, temos:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-x}{x^2-x}\right) = \lim_{x\to 1}\left[\frac{x\left(x^2-1\right)}{x\left(x-1\right)}\right] = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(x+1\right) = \boxed{2.}$$

EXEMPLO 4.2.6 *Calcular o limite*: $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-8}{x-2}\right)$.

Solução: Usando a fatoração polinomial:

$$\boxed{x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2),} \tag{4.9}$$

com $a = 2$, obtemos:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-8}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}\left[\frac{(x-2)(x^2+2x+2)}{x-2}\right] = \lim_{x\to 2}(x^2+2x+2) = \boxed{10.}$$

EXEMPLO 4.2.7 *Usando a mudança de variável $u = 3 - x^3$, calcular o limite*:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{(3-x^3)^4-16}{x^3-1}\right].$$

Solução: Antes da mudança de variável, deixe-nos apresentar uma fatoração polinomial de grau 4. Usando o produto notável $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$, com $A = u^2$ e $B = a^2$, deduzimos que:

$$\boxed{u^4 - a^4 = (u^2-a^2)(u^2+a^2) = (u-a)(u+a)(u^2+a^2)} \tag{4.10}$$

e considerando $a = 4$ em (4.10) obtemos:

$$\frac{u^4-16}{u+2} = \frac{(u^2+4)(u+2)(u-2)}{u+2} = (u^2+4)(u-2).$$

Retornando ao cálculo do limite, notamos que $u = x^3 - 3 \to -2$, quando $x \to 1$, e o limite torna-se:

$$\lim_{u\to -2}\left(\frac{u^4-16}{u+2}\right) = \lim_{u\to -2}\left[\frac{(u^2+4)(u+2)(u-2)}{u+2}\right] = \lim_{u\to -2}(u^2+4)(u-2) = \boxed{-32.}$$

EXEMPLO 4.2.8 (Removendo uma descontinuidade) *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por*:

$$f(x) = \left|\begin{array}{l} \dfrac{x^3+27}{x+3}, \quad se \quad x \neq -3 \\ 0, \quad se \quad x = -3. \end{array}\right.$$

Seria a função f contínua em $x = -3$? Se não, qual valor devemos atribuir a $f(-3)$ de modo a tornar f contínua em $x = -3$?

Solução: A função f será contínua em $x = -3$ se, e somente se, $f(-3) = \lim_{x\to -3} f(x)$. Temos:

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3}\left(\frac{x^3+27}{x+3}\right) = \lim_{x\to -3}\left[\frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x+3}\right] = \boxed{27.}$$

Assim, o valor de $f(-3)$ que torna f contínua em $x = -3$ é precisamente: $\boxed{f(-3) = 27.}$

4.2.4 Limite Infinito & Limite no Infinito

Na seção anterior apresentamos o conceito de limite, no ponto $x = a$, de uma função $y = f(x)$ definida nas proximidades de $x = a$, exceto, possivelmente, no ponto a. Existem outros tipos de limite que aparecem no cálculo e ocorrem quando x ou $f(x)$ tende para $\pm\infty$. Neste contexto, as *operações* com os símbolos $\pm\infty$ nos ajudam a compreender o cálculo de limites.

▶ **OPERAÇÕES COM OS SÍMBOLOS $\pm\infty$** Na investigação de limites do tipo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

a tabela abaixo contendo algumas *operações simbólicas* são normalmente usadas.

$\infty + \infty = \infty$	$\infty \times \infty = \infty$	$(-\infty) \times \infty = -\infty$
$k \times \infty = \infty, \quad \text{se } k > 0$	$k \times \infty = -\infty, \quad \text{se } k < 0$	$(-\infty) \times (-\infty) = \infty$
$k^\infty = \infty, \quad \text{se } k > 1$	$\infty^p = \infty, \quad \text{se } p > 0$	$\infty^p = 0, \quad \text{se } p < 0$
$k/0 = \pm\infty \quad \text{e} \quad k/\pm\infty = 0$	$-\infty - \infty = -\infty$	$\infty \times (-\infty) = -\infty$

Por exemplo, anotamos $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = L$ para indicar que os valores $f(x)$ estão arbitrariamente próximos de L, quando x for suficientemente grande (no caso $x \to +\infty$) ou suficientemente pequeno (no caso $x \to -\infty$). Formalmente, temos:

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ significa que dado um raio $\varepsilon > 0$ existe uma constante $K > 0$, tal que:

$$\boxed{|f(x) - L| < \varepsilon, \quad \text{se} \quad x \geq K.} \tag{4.11}$$

No estudo de hipérboles vimos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ e também $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x}{x-1}\right) = 1.$

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ significa que dado $K > 0$ uma constante arbitrária, existe uma constante $M > 0$, tal que:

$$\boxed{x \geq M \Rightarrow f(x) \geq K.} \tag{4.12}$$

Formalize os conceitos para: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$

(iii) $\lim\limits_{x\to+a} f(x) = +\infty$ significa que os valores $f(x)$ tornam-se arbitrariamente grandes, quando x está próximo de a, isto é, dado $K > 0$, uma constante arbitrária, existe um raio $\delta > 0$, tal que:

$$\boxed{f(x) \geq K, \quad \text{se} \quad x \in D(f) \quad \text{e} \quad |x - a| < \delta.} \tag{4.13}$$

EXEMPLO 4.2.9 *A partir dos gráficos, vê-se que:* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2+2) = -\infty$ *e no caso da função* $y = x^3$*, temos:* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^3\right) = \pm\infty$.

EXEMPLO 4.2.10 *Para a hipérbole* $y = 1/x$*, vimos que* $\lim\limits_{x\to0^+}(1/x) = +\infty$.

Quando não temos o gráfico disponível, o cálculo do limite deve ser feito diretamente na expressão que define a função e as operações com os símbolos $\pm\infty$ são fundamentais e têm significado preciso. Por exemplo, $1/0 = \infty$ deve ser entendido como $\lim\limits_{x\to0}(1/x) = \infty$. Além dessas operações simbólicas com $\pm\infty$, devemos ter em mente as *formas indeterminadas (*4.3).

Ao calcular o limite no infinito de uma função polinomial ou racional (quociente de polinômios) o termo de maior grau é o termo determinante para a resposta do limite. Por exemplo, se $a \neq 0$, então:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\left(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\right) &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[x^4\left(a+b/x+c/x^2+d/x^3+e/x^4\right)\right]\\ &= \infty\times(a+0+0+0+0) = a\times\infty = \pm\infty,\end{aligned}$$

dependendo do sinal do coeficiente a.

EXEMPLO 4.2.11 *Calcular o limite*:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2x}{-2x^3+4x^2-x+6}\right).$$

Solução: Colocando em evidência no numerador e denominador o termo de maior grau, temos:

$$\frac{x^3+2x}{-2x^3+4x^2-x+6} = \frac{x^3(1+2/x^2)}{x^3(-2+4/x-1/x^2+6/x^3)} = \frac{1+2/x^2}{-2+4/x-1/x^2+6/x^3}$$

e tomando o limite, com $x\to\infty$, chegamos ao valor: $\boxed{-1/2.}$

EXEMPLO 4.2.12 *Calcular o limite*: $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+4x^2-5)$.

Solução: Uma análise direta nos conduz à forma indeterminada $\infty-\infty$ e devemos olhar a expressão de outra forma. Temos:

$$\lim_{x\to-\infty}(-2x^3+4x^2-5) = \lim_{x\to-\infty}x^3(-2+4/x-5/x^3) = (-\infty)\times(-2) = \boxed{+\infty.}$$

EXEMPLO 4.2.13 *Calcular o limite:* $\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-3})$.

Solução: Mais uma vez nos deparamos com a indeterminação $\infty - \infty$ e para fugir dela, adotamos a seguinte estratégia:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-3}) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x-\sqrt{x^2-3})(x+\sqrt{x^2-3})}{x+\sqrt{x^2-3}}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-(x^2-3)}{x+\sqrt{x^2-3}}\right] = \boxed{0.}$$

EXEMPLO 4.2.14 (Aplicação do Teorema do Valor Intermediário) *Todo polinômio de grau ímpar tem, ao menos, uma raiz real.*

Solução: Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0$, um polinômio de grau 3. Se a função f assumir algum valor positivo e algum valor negativo, segue do TVI que existe x_0, tal que $f(x_0) = 0$. Calculando os limites no infinito de f, temos:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^3\left(a + b/x + c/x^2 + d/x^3\right) = \pm\infty,$$

conforme seja $a > 0$ ou $a < 0$. Isto nos assegura que f assume valores positivos e valores negativos e, portanto, f assume o valor zero, isto é, existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $f(x_0) = 0$.

EXEMPLO 4.2.15 (Funções Racionais) *Ao calcular o limte no infinito (quando $x \to \pm\infty$) de uma função racional (quociente de dois polinômios), recomendamos colocar em evidência no numerador e no denominador o termo de maior grau:*

$$\frac{A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n}{B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_kx^k} = \left(\frac{x^n}{x^k}\right)\left[\frac{\dfrac{A_0}{x^n} + \dfrac{A_1}{x^{n-1}} + \dfrac{A_2}{x^{n-2}} + \cdots + \dfrac{A_{n-1}}{x} + A_n}{\dfrac{B_0}{x^k} + \dfrac{B_1}{x^{k-1}} + \dfrac{B_2}{x^{k-2}} + \cdots + \dfrac{B_{k-1}}{x} + B_k}\right]. \tag{4.14}$$

Cada termo do lado direito de (4.14) que contém uma potência de x no denominador tem limite zero, com $x \to \pm\infty$ e, sendo assim, o valor do limite se reduz a:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{A_nx^n}{B_kx^k}\right) = \frac{A_n}{B_k}\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^n}{x^k}\right).$$

A resposta final depende dos coeficientes A_n e B_k e, naturalmente, de n e k que são os graus dos polinômios.

(a) *Se os polinômios têm mesmo grau, isto é, $n = k$, então o valor do limite é*:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{A_n x^n}{B_n x^n}\right) = \frac{A_n}{B_n}.$$

(b) *Se o grau n do numerador é maior do que o grau k do denominador então*:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{A_n x^n}{B_k x^k}\right) = \frac{A_n}{B_n}\lim_{x\to\pm\infty} x^{n-k} = \pm\infty. \qquad (\textit{depende do sinal de } A_n/B_k; \quad \textit{note que } n-k>0)$$

(c) *Se o grau n do numerador é menor do que o grau k do denominador, então*:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{A_n x^n}{B_k x^k}\right) = \left(\frac{A_n}{B_k}\right)\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x^{k-n}}\right) = 0. \qquad (\textit{note que } k-n>0)$$

► **ESCREVENDO PARA APRENDER 4.2**

1. Em cada caso abaixo calcule o limite de $f(x)$, quando $x \to a$.

   (a) $f(x) = 2x+5; \quad a = -7.$

   (b) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+1}; \quad a = 0.$

   (c) $f(x) = \dfrac{x^2+3x-10}{x+5}; \quad a = -5.$

   (d) $f(x) = \dfrac{-2x-4}{x^3+2x^2}; \quad a = -2.$

   (e) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}; \quad a = 1.$

   (f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}; \quad a = -1.$

   (g) $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^3-1}; \quad a = 1.$

   (h) $f(x) = \dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}; \quad a = 9.$

   (i) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x}; \quad a = 0.$

   (j) $f(x) = \dfrac{x^2+8x-20}{x^2-x-2}; \quad a = 2.$

   (k) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}; \quad a = 2.$

   (l) $f(x) = \dfrac{x^4-2x+1}{x^3+2x^2+1}; \quad a = 1.$

(m) $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1+x}}{\sqrt{x-1}-x}$; $a = 3$.

(n) $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}}$; $a = 1$

(o) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+2}-1}{x+1}$; $a = -1$ (considere $u = \sqrt[3]{x+2}$)

2. Se f é uma função definida em $\mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, mostre que:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{f(3x)}{x}\right] = 3$. (b) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{f(x^2)}{x}\right] = 0$.

3. Sabendo que $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$, calcule $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{f(x)}{x}$.

4. Sabendo-se que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-5}{x-2} = 3$, calcule $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

5. Se φ é uma função tal que $1 - \dfrac{x^2}{4} \le \varphi(x) \le 1 + \dfrac{x^2}{2}$, $\forall x \neq 0$, calcule $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x)$.

6. Construa uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com as seguintes propriedades:

(i) f não tem limite em $x = 1$ e (ii) $\lim\limits_{x\to 1} |f(x)| = 3$.

7. Seja f uma função tal que $|f(x)| \le x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é continua em $x = 0$.

8. Investigue a existência dos limites: $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0} x^2 g(x)$, para a função g definida por:

$$g(x) = \left| \begin{array}{ll} 1, & \text{se } x \le 0 \\ -1, & \text{se } x > 0. \end{array} \right.$$

9. Em cada caso abaixo, calcule os limites laterais de f no ponto a.

(a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$, $a = -2$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{(x-2)^2}$, $a = 2$

(c) $f(x) = \dfrac{2-x}{(1-x)^3}$, $a = 1$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{|x-2|}$, $a = 2$

(e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{5}}{x}$, $a = 0$

(f) $f(x) = \dfrac{(x+3)|x+2|}{x+2}$, $a = -2$

(g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$, $a = 1$

(h) $f(x) = \dfrac{x+3}{|x^2-9|}$, $a = -3$

(i) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$, $a = 1$

(j) $f(x) = \dfrac{x+2}{|x^2-4|}$, $a = -2$

10. Calcule $\lim_{x\to 2^+} \sqrt{x-2}$ e verifique se existe o limite $\lim_{x\to 2^-} \sqrt{x-2}$.

11. Calcule os limites laterais indicados.

(a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$ (c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}$ (d) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}$

(e) $\lim_{x\to 3^+} \frac{5}{x-3}$ (f) $\lim_{x\to 3^-} \frac{5}{x-3}$ (g) $\lim_{x\to 0^+} \frac{2x+1}{x}$ (h) $\lim_{x\to 0^-} \frac{x-3}{x^2}$

(i) $\lim_{x\to 0^+} \frac{3}{x^2-x}$ (j) $\lim_{x\to 0^-} \frac{3}{x^2-x}$ (k) $\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$ (l) $\lim_{x\to -1^-} \frac{|x-1|}{x-1}$

(m) $\lim_{x\to 0^+} \frac{2x+1}{x^2+x}$ (n) $\lim_{x\to -1^+} \frac{3x^2-4}{1-x^2}$ (o) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|}$ (p) $\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+3}{x^2-1}$

12. Calcule os seguintes limites no infinito:

(a) $\lim_{x\to +\infty} \left(x^4+3x+2\right)$ b) $\lim_{x\to -\infty} \left(x^4-3x+2\right)$ (c) $\lim_{x\to +\infty} \left(3x^3+2x+1\right)$

(d) $\lim_{x\to -\infty} \left(3x^3+2x+1\right)$ (e) $\lim_{x\to +\infty} \left(5-4x+x^2-x^5\right)$ (f) $\lim_{x\to -\infty} \left(5-4x+x^2-x^5\right)$

(g) $\lim_{x\to +\infty} \frac{5x^3-6x+1}{6x^3+2}$ (h) $\lim_{x\to -\infty} \frac{5x^3-6x+1}{6x^3+2}$ (i) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{x+3}$

(j) $\lim_{x\to +\infty} \left(x-\sqrt{x+3}\right)$ (k) $\lim_{x\to +\infty} \left(x-\sqrt{x^2+3}\right)$ (l) $\lim_{x\to +\infty} \left(x-\sqrt{x^3+3}\right)$

(m) $\lim_{x\to +\infty} \left(2x-\sqrt{x^3+3}\right)$ (n) $\lim_{x\to -\infty} \frac{5-x}{3+2x}$ (o) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2-\sqrt{|x|}}{\sqrt{1-x}}$

RESPOSTAS & SUGESTÕES

ESCREVENDO PARA APRENDER 4.1

1. (a) F (b) F (c) V

2. $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ e $f(1) = 3$. Logo, f é descontínua em $a = 1$.

3. Como f é contínua em $a = 1$, devemos ter $f(1) = -1$.

4. (a) $k = 12$ (b) $k = \sqrt{3}/6$.

5. f é descontínua em $x = -1$, porque $f(-1) = 2$ e $\lim_{x\to -1} f(x) = -1$. A função é contínua em $x = 0$.

6. Considere, por exemplo, a função f definida assim: $f(x) = x$, para $x \neq 2$ e $f(2) = 0$.

7. A única descontinuidade ocorre no ponto $x = 3$.

8. (a) sim (b) sim (c) não (d) não.

9. (a) 3 (b) não existe (c) 3 (d) 4 (e) sim (f) não.

10. Se $\alpha = 15$, o limite será -1.

11. Se $x \leq 200$, o custo $C(x)$ é determinado em reais por $C(x) = 1.000 + 10x$. O custo para uma distância de 200 km é, portanto, $C(200) = R\$3.000$. Se a distância excede 200 km, isto é, se $x > 200$, então o custo total será dado por $C(x) = 3.000 + 8(x - 200)$. Resumindo, temos: $C(x) = 1000 + 10x$, se $0 < x \leq 200$, e $C(x) = 1400 + 8x$, para $x > 200$. Essa função é contínua em $x = 200$.

12. Se $0 \leq x \leq 15000$, um único turno de trabalho será suficente e, assim, $C(x) = 2000 + 2x$. Se $15000 < x \leq 45000$, então a fábrica deverá operar em 3 turnos e, nesse caso, $C(x) = 6000 + 10x$. Nesse intervalo a função custo é descontínua.

13. As descontinuidades ocorrem nos instantes $t = 1,\ t = 2,\ t = 3$ e $t = 4$

14. Basta observar que $f(-1) < 0$ e que $f(1) > 0$. A conclusão segue do Teorema do Valor Intermediário.

15. Use o Teorema do Valor Intermediário para a função $f(x)$, nos intervalos $[-3, 0]$, $[0, 1]$ e $[1, 2]$.

16. Não. Como a função não é contínua em $[-2, 2]$, o fato não contradiz o resultado citado.

17. V, V, F, F, F, V.

18. Em cada caso, note que os limites laterais, quando existem, são diferentes.

ESCREVENDO PARA APRENDER 4.2

1. (a) -9 (b) $3/2$ (c) -7 (d) $-1/2$ (e) 4 (f) $-1/3$ (g) $4/3$ (h) $1/6$ (i) 1 (j) 4 (k) $1/3\sqrt[3]{4}$

   (l) 0 (m) $1/(3 - \sqrt{2})$ (n) -32 (o) $1/3$.

2. Nos dois casos, usaremos uma mudança de variável.

(a) Com $u = 3x$, tem-se $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(3x)}{x} = 3 \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{f(u)}{u}$.

(b) Faça $u = x^2$ e encontre $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x^2)}{x} = \pm \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\sqrt{u} f(u)}{u}$.

3. 4 e -2.

4. 5.

5. Use a Propriedade do Confronto.para deduzir que $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 1$.

6. Seja $f(x) = 3$, se $x \geq 1$, e $f(x) = -3$, se $x < 1$.

7. A função $g(x)$ não tem limite em $x = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} \left[x^2 g(x)\right] = 0$, pelo Corolário 4.2.3.

8. Veja a tabela.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	-4	$2\sqrt{5}/5$	-1	$-\sqrt{2}$	$-1/6$	-2	$-1/4$
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	4	$2\sqrt{5}/5$	1	$\sqrt{2}$	$1/6$	2	$1/4$

9. Quando $x \to 2^+$ o limite existe e vale 0. Quando $x \to 2^-$ o limite não existe, porque a função não está definida à esquerda de $x = 2$.

10. Veja a tabela.

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)	(l)	(m)	(n)	(o)	(p)
∞	$-\infty$	∞	∞	∞	$-\infty$	∞	$-\infty$	$-\infty$	∞	∞	-1	∞	$-\infty$	1	$-\infty$

11. Veja a tabela.

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)	(l)	(m)	(n)	(o)
∞	∞	∞	$-\infty$	$-\infty$	∞	$5/6$	$5/6$	0	∞	$5/6$	$-\infty$	$-\infty$	$-1/2$	-1

5.1 Funções Deriváveis

Na Unidade 4, aprendemos que a declividade da curva $y = f(x)$, no ponto $A(a, f(a))$, é o valor do limite:

$$\boxed{m = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right],} \tag{5.1}$$

caso o limite exista. Esse limite depende do valor $x = a$ e no cálculo do limite, nada há de especial em usarmos a notação $x = a$, que representa um valor genérico da variável x, e pode ser substituído por qualquer outra letra, inclusive o próprio x. O limite do quociente de Newton:

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]} \tag{5.2}$$

recebe o nome de *derivada* da função f no ponto x e é indicado por um dos rótulos:

$$f'(x),\quad \frac{df}{dx},\quad \frac{dy}{dx},\quad y'(x),\quad etc.\ldots.$$

Assim, a derivada de f no ponto x é definida pelo valor, caso exista, do limite:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right],} \tag{5.3}$$

EXEMPLO 5.1.1 *Calcular a derivada da função constante $f(x) = k$, $\forall\, x$, e da função linear $g(x) = ax$.*

Solução: Para a função constante $f(x) = k$, temos:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0,\ \forall\, h,$$

e, portanto, $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0$. No caso da função linear $g(x) = ax$, temos:

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{a\,(x+h)-ax}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\left(\frac{ah}{h}\right) = a.$$

Para interpretar as respostas, notamos que o gráfico da função constante $y = k$ é uma reta horizontal, que tem declividade zero, isto é, $f'(x) = 0$. Por outro lado, o gráfico da função linear $y = ax$ é uma reta de declividade a, isto é, $g'(x) = a$.

EXEMPLO 5.1.2 *Calcular a derivada da função $f(x) = ax^2$, sendo a constante.*

Solução: De acordo coma definição, temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{a(x+h)^2 - ax^2}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{2ahx + ah^2}{h}\right] = \lim_{h\to 0}(2ax+h) = 2ax.$$

EXEMPLO 5.1.3 *Vimos no Exemplo 5.1.1 que a "derivada de uma constante é zero". A constante k considerada no referido exemplo é uma constante aditiva (isolada!). No caso da constante multiplicar uma função, como a constante a do Exemplo 5.1.2, ela aparece no final do cálculo da derivada. O que temos é:*

$$\boxed{\left[k \cdot f(x)\right]' = k \cdot f'(x).} \tag{5.4}$$

De fato, o quociente de Newton neste caso é:

$$\frac{k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x)}{h} = k \cdot \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]$$

e fazendo $h \to 0$, chegamos à regra de derivação (5.4).

EXEMPLO 5.1.4 *Vamos calcular a derivada da função $f(x) = \sqrt{x}$, em um ponto $x > 0$.*

Solução: Já lidamos com o quociente de Newton de $\sqrt{x}$ no Exemplo 4.2.4. Após as simplificações, o limite se reduz a:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

▶ INTERPRETAÇÃO DA DERIVADA

O conceito de derivada teve sua motivação, e posteriormente sua consolidação, nos trabalhos de Newton e Leibniz e por esta razão recebeu a denominação de *Derivada de Newton-Leibniz.*

(i) Visão Geométrica

Segundo Leibniz, a derivada está associada ao problema de encontrar a reta tangente ao gráfico de uma função $y = f(x)$. O que vemos é a derivada como a declividade da reta tangente, conforme estudamos na Unidade 4.

(ii) Visão Cinemática

Newton, por sua vez, estimulado por seus trabalhos sobre movimento de uma partícula, associou a derivada à velocidade instantânea da partícula. A Figura 5.1 ilustra uma partícula se movendo ao longo de uma trajetória γ, do ponto A até o ponto B.

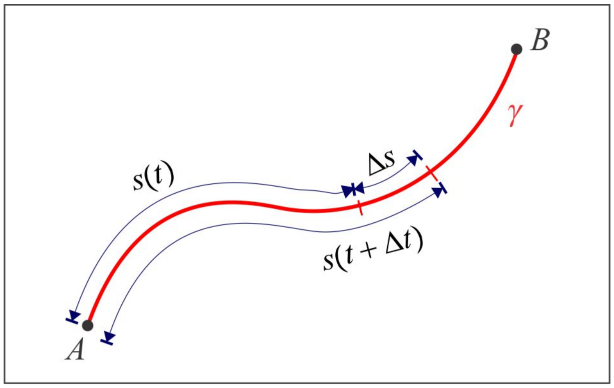


Figura 5.1: Interpretação da Derivada.

Se representarmos por $s(t)$ o deslocamento da partícula entre os instantes $t = 0$ e t, então o deslocamento entre os instantes t e $t + \Delta t$ será:

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$$

e a velocidade média, ou taxa média de variação, nesse intervalo de tempo é dada por:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

No caso em que o movimento é uniforme, isto é, com velocidade média constante v, temos a equação do movimento:

$$s(t) = s_0 + vt.$$

Se o movimento não é uniforme, a velocidade média não dá informação sobre o estado de movimento em um determinado instante t, porque existem vários movimentos entre t e $t + \Delta t$ com mesma velocidade média. Para obter informações mais precisas do estado de movimento no instante t consideramos intervalo de tempo Δt cada vez menor, isto é, $\Delta t \to 0$. A velocidade instantânea é definida por:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \right],$$

que é, na verdade, a derivada do deslocamento $s(t)$, no instante t.

Outro ente físico que deve ser considerado chama-se *aceleração*, indicada por $a(t)$, que mede a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \right] = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right).$$

► **SOBRE A NOTAÇÃO**

(i) Quando a variável dependente for o tempo t, costuma-se representar a derivada $s'(t)$ com um ponto sobre a função. Assim, temos:

$$s'(t) = \dot{s}(t), \quad y'(t) = \dot{y}(t), \quad etc.\ldots$$

(ii) Vimos que a aceleração pode ser vista como a derivada da velocidade ou a derivada de *segunda ordem* do deslocamento:

$$a(t) = v'(t) = \dot{v}(t) \quad \text{ou} \quad a(t) = (s'(t))' = s''(t) = \ddot{s}(t).$$

(iii) Outra notação normalmente usada é $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ no lugar de $f''(x)$. Aqui o dígito 2 deve ser entendido não como expoente de uma potência, mas, como ordem de derivação (derivar duas vezes a função f).

(iv) A primeira derivada f' lê-se "f linha" e a segunda derivada f'' é lida "f duas linhas", e assim por diante. As expressões $\dfrac{df}{dx}$ e $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ não devem ser vistas como frações; elas representam as derivadas f' e f'', respectivamente.

► **NOTA HISTÓRICA**

Isaac Newton nasceu em Londres, no ano de 1643, e viveu até o ano de 1727. Cientista, químico, físico, mecânico e matemático, trabalhou junto com Leibniz na elaboração do cálculo infinitesimal. Durante sua trajetória, ele descobriu várias leis da física, entre elas, a lei da gravidade. Este cientista inglês, que foi um dos principais precursores do Iluminismo, criou o binômio de Newton, e, fez ainda, outras descobertas importantes para a ciência. Quatro de suas principais descobertas foram realizadas em sua casa, isto ocorreu no ano de 1665, período em que a Universidade de Cambridge foi obrigada a fechar suas portas por causa da peste que se alastrava por toda a Europa. Na fazenda onde morava, o jovem e brilhante estudante realizou descobertas que mudaram o rumo da ciência: o teorema binomial, o cálculo, a lei da gravitação e a natureza das cores. Frases atribuídas a Isaac Newton:

(i) "Se vi mais longe foi por estar de pé sobre ombros de gigantes."

(ii) "O que sabemos é uma gota, o que ignoramos é um oceano."

(iii) "Eu consigo calcular o movimento dos corpos celestiais, mas não a loucura das pessoas."

(iv) "Nenhuma grande descoberta foi feita jamais sem um palpite ousado".

(fonte: Wikipédia)

Leibniz, Le Gottfried (1646 - 1716) Le Gottfried Wilhelm von Leibniz (Leipzig, 1 de julho de 1646 Hanover, 14 de novembro de 1716) foi um filósofo, cientista, matemático, diplomata e bibliotecário alemão. A ele é atribuída a criação do termo "função"(1694), que usou para descrever uma quantidade relacionada a uma curva, como, por exemplo, a inclinação ou um ponto qualquer situado nela. É creditado a Leibniz e a Newton, o desenvolvimento do cálculo moderno, em particular o desenvolvimento da Integral e da Regra do Produto. Demonstrou genialidade também nos campos da lei, religião, política, história, literatura, lógica, metafísica e filosofia.

(fonte: Wikipédia)

EXEMPLO 5.1.5 (Taxa de Variação) *A altura de um triângulo retângulo, de base constante* $b = 5$, *cresce a uma taxa de* $4\ cm/s$. *Qual a taxa de crescimento da área do triângulo*?

Solução: A área do triângulo $S = \frac{1}{2}bh$ depende linearmente da altura h que, por sua vez, aumenta com o tempo a uma taxa $h' = \dfrac{dh}{dt} = 4$. Segue do Exemplo 5.1.3 que a taxa de variação da área é:

$$\frac{dS}{dt} = S'(t) = \frac{1}{2}bh' = 2b.$$

Portanto, a taxa de crescimento da área é $10\ cm^2/s$. Veja a ilustração gráfica na Figura 5.2.

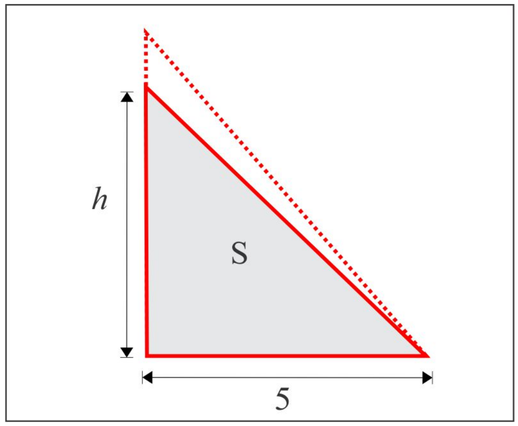


Figura 5.2: Taxa de Variação - Exemplo 5.1.5.

EXEMPLO 5.1.6 (Taxa de Variação) *Um tanque cilíndrico de raio $R = 2m$ contendo água está sendo esvaziado a uma taxa de $2.000\ l/\min$. A que taxa o nível da água diminui dentro do tanque?*

Solução: Se V é o volume de águal no tanque e h é a altura do nível da água, então $\dfrac{dV}{dt} = -2.000$ (o sinal negativo indica uma diminuição do volume) e queremos deteminar $\dfrac{dh}{dt}$. Considerando que um metro cúbico tem 1000 litros, a equação que relaciona V e h é:

$$V = 1000\pi R^2 h \qquad (R = 2 \text{ é constante}) \tag{5.5}$$

e por derivação, encontramos:

$$\frac{dV}{dt} = \left(1000\pi R^2\right)\frac{dh}{dt} = (4000\pi)\frac{dh}{dt},$$

de onde segue que:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{2\pi}$$

e o nível da água diminui a uma taxa de $\dfrac{1}{2\pi}\ m/\min$.

▶ CONTINUIDADE DAS FUNÇÕES DERIVÁVEIS

Considerando que a derivada é um limite, é natural pensar nas *derivadas laterais* de f, no ponto $x = a$, as quais são definidas por:

(i) Derivada lateral à direita: $\boxed{f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+}\left[\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}\right].}$

(ii) Derivada lateral à esquerda: $\boxed{f'_{-}(a) = \lim_{h\to 0^-} \left[\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \right]}$.

A condição necessária e suficiente para que a função f seja derivável no ponto $x = a$, isto é, para que $f'(a)$ exista, é que as derivadas laterais no ponto $x = a$ sejam iguais, isto é, $f'_{+}(a) = f'_{-}(a)$.

EXEMPLO 5.1.7 (Uma função contínua sem derivada na origem) *A função $f(x) = |x|$, embora contínua na origem, não é derivável em $x = 0$. De fato, temos que $f(h) = |h| = \pm h$, conforme seja $h > 0$ ou $h < 0$ e, portanto*:

$$f'_{+}(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

De forma similar, encontramos:

$$f'_{-}(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Como $f'_{+}(0) = 1$ e $f'_{-}(0) = -1$, segue que a função f não tem derivada na origem e, portanto, a reta tangente ao gráfico de f, na origem, não está definida. O que podemos dizer é que existem "duas retas tangentes" na origem: uma à direita $(y = x)$ e outra à esquerda $(y = -x)$.

A existência da reta tangente traduz a derivabilidade da função ou a suavidade do seu gráfico. No caso da função $f(x) = |x|$ vemos que seu gráfico tem um ponto "anguloso" (pontiagudo) na origem, onde o gráfico perde a suavidade.

Vimos no Exemplo 5.1.7 que uma função pode ser contínua num ponto e não ter derivada nesse ponto. E uma função derivável num ponto pode ser descontínua nesse ponto? A resposta está contida na seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 5.1.8 *Se $y = f(x)$ é derivável no ponto $x = a$, então f é contínua nesse ponto. Em outras palavras, uma função descontínua num ponto não pode ser derivável nesse ponto.*

Prova: Basta mostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. De fato, temos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \left[(x-a) \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) + f(a) \right] = \left[\lim_{x\to a} (x-a) \right] f'(a) + f(a) = f(a). \qquad \blacksquare$$

EXEMPLO 5.1.9 *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:*

$$f(x) = \begin{vmatrix} x^2, & se\ x \geq 0 \\ 1, & se\ x < 0, \end{vmatrix}$$

não é contínua em $x = 0$ e, portanto, não pode ser derivável nesse ponto.

► **ESCREVENDO PARA APRENDER 5.1**

1. Em cada caso, encontre a derivada da função $y = f(x)$, usando a definição.

   (a) $y = x^2 + 1$ (b) $y = 2x^3$ (c) $y = \sqrt{x} + ax + b$ (d) $y = 2x^2 - 3x$ (e) $y = \dfrac{1}{x+1}$.

2. Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por: $f(x) = -x$, para $x \leq 0$, e $f(x) = 2$, para $x > 0$.

   (a) Calcule $f'(-1)$ (b) Existem as derivadas $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$? (c) f é derivável em $x = 0$?

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = |x| + x$.

   (a) Existe $f'(0)$? (b) Existe $f'(x)$ para $x \neq 0$? (c) Como se define a função f'?

4. Investigue a derivabilidade da função dada no ponto $x = a$ sugerido.

   (a) $x = 0;\ f(x) = \begin{vmatrix} x^2, \text{ se } x \leq 0 \\ x, \text{ se } x > 0 \end{vmatrix}$ (b) $x = 1;\ f(x) = \begin{vmatrix} \sqrt{x}, \text{ se } 0 < x < 1 \\ 2x - 1, \text{ se } 1 \leq x < 2 \end{vmatrix}$

   (c) $x = 1;\ f(x) = \begin{vmatrix} \sqrt{x}, \text{ se } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}(x+1), \text{ se } 1 \leq x < 2 \end{vmatrix}$ (d) $x = 0;\ f(x) = |x|$

5. Existe algum ponto no qual a função $y = \left|x^2 - 4x\right|$ não é derivável? Por quê?

6. Seja f uma função derivável em $x = 1$, tal que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)}{h} = 5$. Calcule $f(1)$ e $f'(1)$.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável, tal que $f(a+b) = f(a) + f(b) + 5ab$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Se $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)}{h} = 3$, calcule $f(0)$ e $f'(x)$.

8. Calcule a e b, de modo que a função $f(x) = \begin{vmatrix} 3x^2, \text{ se } x \leq 1 \\ ax + b, \text{ se } x > 1 \end{vmatrix}$ seja derivável em $x = 1$.

9. Determine a equação da reta tangente à parábola $y = x^2$, com inclinação $m = -8$. Faça um gráfico ilustrando a situação.

10. Determine a equação da reta que tangencia o gráfico da função $y = x^2$ e é paralela à reta $y = 4x+2$.

11. Verifique que a reta tangente ao gráfico da função $f(x) = 1/x$, no ponto de abscissa $x = a$, intercepta o eixo x no ponto $A(2a, 0)$.

12. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \left| \begin{array}{l} x^2, \text{ se } x \leq 1 \\ 2, \text{ se } x > 1. \end{array} \right.$$

(a) Esboce o gráfico de f (b) f é contínua em $x = 1$? (c) f é derivável em $x = 1$?

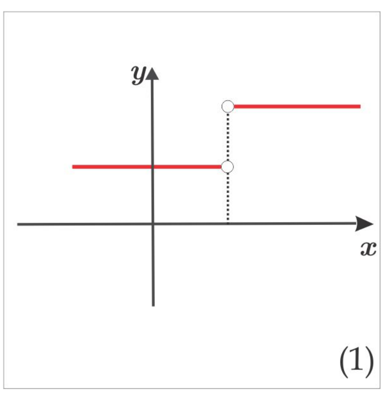
13. Repita o exercício precedente, considerando, agora, $f(x) = \left| \begin{array}{l} x^2, \text{ se } x \leq 1 \\ 1, \text{ se } x > 1. \end{array} \right.$

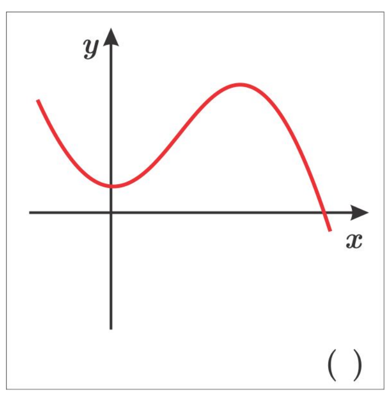
14. Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x|x|$.

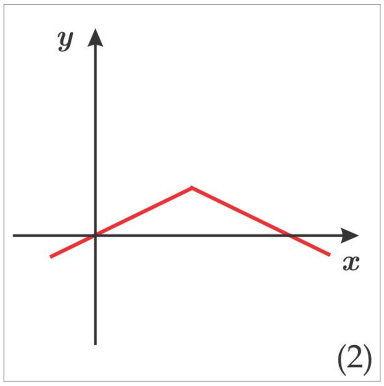
(a) Determine $f'(x)$, para $x \neq 0$. (b) Existe $f'(0)$? (c) Esboce os gráficos de f e de f'.

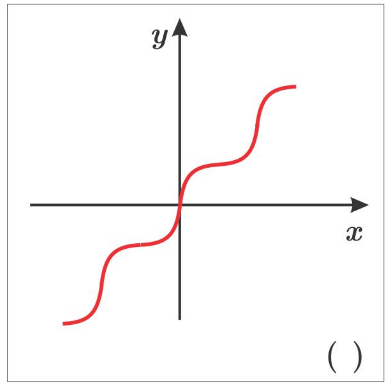
15. Determine as retas tangentes à curva $y = x^2$ que passam no ponto $(0, -1)$.

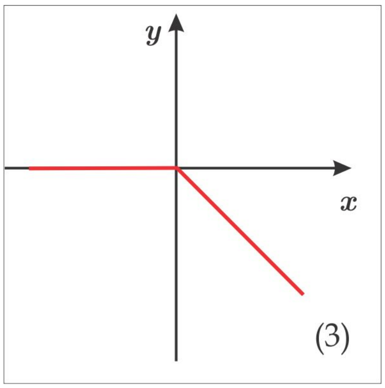
16. Os gráficos da coluna da esquerda são das derivadas das funções cujos gráficos estão na coluna da direita. Faça a correspondência, numerando, convenientemente, a coluna da direita.

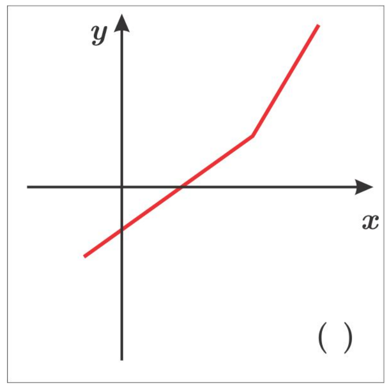


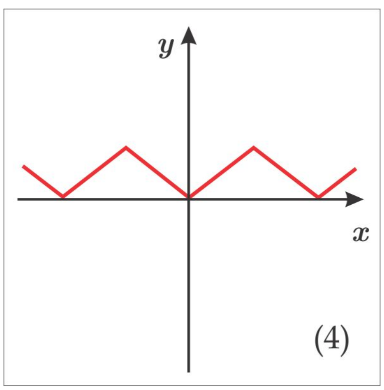


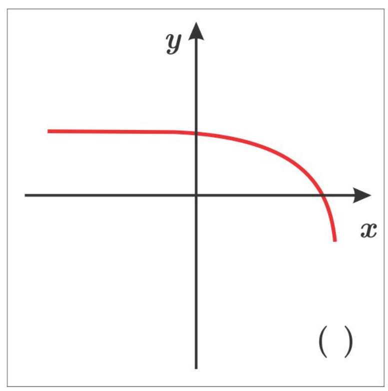












5.2 Regras Básicas de Derivação

O cálculo de derivadas é feito, em geral, por meio de regras de derivação e em alguns casos, é necessário o uso da definição de derivada como um limite. Além das regras estabelecidas nos Exemplos 5.1.1, 5.1.2 e 5.1.3, apresentaremos regras de derivação envolvendo potência, soma, produto, quociente e composição de funções. As comprovações dependem das propriedades do limite e de alguns ajustes no quociente de Newton.

Sejam f e g duas funções definidas em um intervalo I, contendo o ponto a no seu interior, e suponhamos que essas funções sejam deriváveis no ponto $x = a$.

► DERIVADA DA POTÊNCIA: $\boxed{[x^n]' = nx^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.}$

Prova: Dado um número inteiro positivo p, o fatorial de p, representado por $p!$, é definido por:

$$p! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times p. \tag{5.6}$$

Decorre da definição a seguinte propriedade do fatorial:

$$p! = (p-1)! \times p, \quad p = 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

onde convenciona-se $0! = 1$. Os produtos notáveis $(x \pm h)^2 = x^2 \pm 2xh + h^2$ são casos particulares do desenvolvimento Binomial de Newton:

$$\boxed{(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} x^{n-k} h^k} \tag{5.7}$$

onde os coeficientes binomiais $C_{n,k}$ são dados por:

$$\boxed{C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots n.} \tag{5.8}$$

Por exemplo,

$$C_{n,0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1, \quad C_{n,1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n \quad C_{n,n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1, \text{ etc.} \ldots$$

e com estes ingredientes, vemos que o quociente de Newton da função $f(x) = x^n$ vem dado por:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{C_{n,0}x^n + C_{n,1}x^{n-1}h + C_{n,2}x^{n-2}h^2 + \cdots + C_{n,n-1}xh^{n-1} + C_{n,n}h^n - x^n}{h}$$

e após as simplificações, obtemos:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = C_{n,1}x^{n-1} + C_{n,2}x^{n-2}h + \cdots + C_{n,n-1}xh^{n-2} + C_{n,n}h^{n-1}. \tag{5.9}$$

Fazendo $h \to 0$ em (6.19), considerando que $C_{n,1} = 1$, obtemos a regra: $\dfrac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$.

▶ DERIVADA DA SOMA: $\boxed{[f+g]'(a) = f'(a) + g'(a).}$

Prova: O quociente de Newton da função $f+g$ é:

$$\frac{[f(a+h)+g(a+h)]-[f(a)+g(a)]}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{g(a+h)]-g(a)}{h} \tag{5.10}$$

e fazendo $h \to 0$ o lado direito de (6.21) tende para $f'(a)+g'(a)$.

▶ DERIVADA DO PRODUTO: $\boxed{[f \cdot g]'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).}$

Prova: É fácil verificar que:

$$\frac{[f(a+h)\cdot g(a+h)]-[f(a)\cdot g(a)]}{h} = g(a+h)\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right] + f(a)\left[\frac{g(a+h)]-g(a)}{h}\right]. \tag{5.11}$$

e para concluir, fazemos $h \to 0$, notando que $g(a+h) \to g(a)$, pela continuidade de g no ponto a, e o lado direito de (5.11) tende para $f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.

▶ DERIVADA DO QUOCIENTE: $\boxed{\left[\frac{f}{g}\right]'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}.}$

Prova: Naturalmente, estamos admitindo que $g(x) \neq 0$ em um intervalo aberto contendo o ponto a. Temos:

$$\frac{1}{h}\left[\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right] = \frac{1}{g(a)g(a+h)}\left[g(a)\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right) - f(a)\left(\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right)\right]$$

e para concluir fazemos $h \to 0$, considerando que $g(a+h) \to g(a)$ e:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \to f'(a) \quad \text{e} \quad \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \to g'(a).$$

▶ ESCREVENDO PARA APRENDER 5.2

1. Se $f(x) = 3x^4 + x^3 - 2x$, calcule as derivadas $f'(0)$, $f''(0)$ e $f^{(30)}(0)$.

2. Se $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, verifique que $(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2\dfrac{dy}{dx}$.

3. Calcule a derivada de primeira ordem de cada uma das funções abaixo.

   (a) $y = \dfrac{\pi}{x} + 2$ (b) $y = \dfrac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 5x^4$ (c) $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

4. Determine as retas horizontais que são tangentes ao gráfico da função $g(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x - 1$.

5. Em cada caso, determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico de f, no ponto cuja abscissa é fornecida.

   (a) $f(x) = x^{2/3},\ x = 8$ (b) $f(x) = x^{-3/4},\ x = 16$ (c) $f(x) = \sqrt{x},\ x = 3$.

6. Determine a equação da reta normal à curva $y = -x^3/6$, com inclinação $m = 8/9$.

7. Seja $y = f(x)$ a função definida por:

$$y = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x-2}, \text{ se } x \geq 2 \\ -\sqrt{2-x}, \text{ se } x \leq 2. \end{array} \right.$$

   Encontre a reta tangente e a reta normal ao gráfico de f, no ponto de abscissa $x = 2$.

5.3 Regra da Cadeia & Derivação Implícita

As regras de derivação apresentadas até agora nos permitem derivar a função $g(x) = (x^2+1)^2$. De fato, temos:

$$g(x) = x^4 + 2x^2 + 1 \Rightarrow g'(x) = 4x^3 + 4x.$$

E se fosse $g(x) = (x^2+1)^{200}$, como calcular a derivada nesse caso? Se fizermos $u = x^2 + 1$, teremos $f(x) = u^{200}$ e a função $y = f(x)$ é olhada como a função composta $y = (g \circ u)(x)$, com $g(t) = t^{200}$. Vemos, portanto, a necessidade de uma regra que nos permita derivar diretamente a função composta. Essa regra de derivação, conhecida pela denominação de **Regra da Cadeia**, parte do princípio que $f : \mathcal{D} \to \mathcal{I}$ é derivável no ponto $x = a$ e que $g : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto $b = f(a)$ e, assim, teremos a derivabilidade da função composta $g \circ f$ no ponto $x = a$.

► DERIVADA DA FUNÇÃO COMPOSTA: $\boxed{[g \circ f]'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).}$

Prova: Para chegarmos à regra de derivação, notamos que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x} \Leftrightarrow \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{y(u+\Delta u) - y(u)}{\Delta u} \times \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}. \tag{5.12}$$

Fazendo $\Delta x \to 0$ em (5.12), o que acrreta $\Delta u \to 0$, obtemos a Regra da Cadeia:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}.} \tag{5.13}$$

Considerando $y = g(u)$ e $u = f(x)$, a Regra da Cadeia, que é uma das, senão a mais importante, regra de derivação, também se apresenta sob a forma:

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x) \cdot f'(x).} \tag{5.14}$$

A Figura 5.3 ilustra graficamente a Regra da Cadeia.

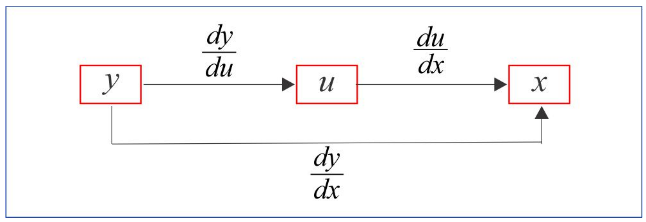


Figura 5.3: A Regra da Cadeia.

► **DERIVADA DA FUNÇÃO INVERSA:**

Seja $y = f(x)$ uma bijeção derivável no intervalo $a < x < b$, com $f'(x) \neq 0$ no intervalo (a, b). Se $x = g(y)$ é a inversa de f, então g é derivável no ponto $y = f(x)$ e a derivada $g'(y)$ é dada por:

$$\boxed{g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.} \tag{5.15}$$

De fato, dado $y_0 = f(x_0)$, temos:

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right]^{-1} \tag{5.16}$$

e fazendo $y \to y_0$ em (5.16), lembrando que $x \to x_0$, pela continuidade de g, obtemos o resultado.

► **COMBINANDO REGRAS:**

Dada uma função derivável $u = u(x)$, combinando a Regra da Cadeia (5.14) com a Regra da Potência e com a derivada da raiz quadrada dada no Exemplo 5.1.4, obtemos, respctivamente, as seguintes regras de derivação:

(i) Regra da Potência: $\boxed{[u^n]' = nu^{n-1} \cdot u'.}$

(ii) Regra da Raiz Quadrada: $\boxed{\left[\sqrt{u}\,\right]' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}.}$

EXEMPLO 5.3.1 (Derivando Implicitamente) *Suponhamos que a equação $x^3y - y^2 = 0$, $y > 0$, defina, implicitamente, y como função de x e calculemos $y'(1)$. Imaginando $y = f(x)$, temos:*

$$x^3 f(x) - big[f(x)\,]^2 = 0 \tag{5.17}$$

e derivando a equação (5.17) em relação à variável x chegamos a:

$$3x^2 f(x) + x^3 f'(x) - 2f(x)\,f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2y + x^3y' - 2yy' = 0.$$

Para calcular o valor $y'(1)$ basta substituir na última equação x e y por 1 e obtemos:

$$3 + y'(1) - 2y'(1) = 0 \Leftrightarrow y'(1) = -3.$$

EXEMPLO 5.3.2 *Seja γ a curva descrita pela equação $y^3 - 3xy = 14$, onde não temos a variável y definida, de forma explícita, como uma função de x. Ainda assim, é possível calcular, implicitamente, a derivada $y'(x)$. A ferramenta a ser usada é a Regra da Cadeia.*

(i) *O ponto $A(-1, 2)$ jaz na curva γ. De fato. basta observar que as coordenadas $x = -1$ e $y = 2$, do ponto A, satisfazem a equação da curva e por derivação implícita, obtemos:*

$$3y^2y' - 3y - 3xy' = 0$$

e no ponto $A(-1, 2)$ temos:

$$12y' - 6 + 3y' = 0 \Rightarrow y'(-1) = 3/5.$$

(ii) *A reta tangente ao gráfico da curva γ, no ponto $A(-1, 2)$, tem declividade $m_T = y'(-1) = 3/5$ e a equação da reta tangente é, portanto:* $3x - 5y - 7 = 0$.

EXEMPLO 5.3.3 *Vamos derivar, com auxílio da Regra da Cadeia, a função $y = (x^2 + 1)^2$.*

Solução: Se $u = x^2 + 1$, então $y = u^2$ e da Regra da Cadeia, temos:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 2u \cdot 2x = 4x(x^2 + 1) = 4x^3 + 4x.$$

EXEMPLO 5.3.4 *Derivar a função* $f(x) = (x^2+1)^{200}$.

Solução: Com a Regra da Cadeia, obtemos:

$$y' = 200u^{199}(2x) = 400x(x^2+1)^{199}.$$

EXEMPLO 5.3.5 *Calcular* $y'(1)$*, sabendo que* $y(x) = \sqrt{6x+x^2}$.

Solução: Fazendo $u = 6x + x^2$, então $y = \sqrt{u}$ e pela Regra da Cadeia, obtemos:

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times (6+2x) = \frac{6+2x}{2\sqrt{6x+x^2}}.$$

Considerando $x = 1$, resulta $y'(1) = 4/\sqrt{7}$.

EXEMPLO 5.3.6 (Taxa de Variação) *O raio de uma bola esférica cresce à razão de* 5 *cm/s. Qual a taxa de crescimento do volume e da área da bola, no instante em que o raio mede* 10 *cm?*

Solução: O volume e a área da bola esférica são, respectivamente, $V = (\frac{4}{3})\pi r^3$ e $S = 4\pi r^2$, onde $r = r(t)$ é o raio da bola, no instante t. Da Regra da Cadeia, resulta:

(i) $\dfrac{dV}{dt} = (\frac{4}{3})\pi(3r^2r') = 4\pi r^2 r'$ e no instante em que $r = 10$, temos:

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi \times 10^3 \, cm^3/s.$$

(ii) $\dfrac{dS}{dt} = 8\pi r r'$ e no instante em que $r = 10$, temos:

$$\frac{dS}{dt} = 400\pi \, cm^2/s.$$

► ESCREVENDO PARA APRENDER 5.3

1. Se $y = x^2 - \sqrt{1+u^2}$ e $u = \dfrac{x+1}{x-1}$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

2. Cada uma das equações abaixo define, implicitamente, y como função de x. Encontre $\dfrac{dy}{dx}$.

(a) $y^3 = x + y$ (b) $y^3 + 2xy = \sqrt{x}$ (c) $\sqrt{x+y} = \sqrt{y+1}$ (d) $\sqrt{xy} = 1 + x^2 y$

3. Suponha que $x = x(t)$ seja uma função derivável em $\mathbb{R}$. Se $y = \dfrac{1}{x^2+1}$, verifique que

$$\frac{dy}{dt} = -2xy^2 \frac{dx}{dt}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

4. Suponha que $x = x(t)$ seja uma função derivável até a segunda ordem. Se $y = x^3$, verifique que

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 6x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 3x^2 \frac{d^2x}{dt^2}.$$

5. Sejam f e g funções deriváveis, tais que $g(-1) = 2$, $f(2) = -3$, $g'(-1) = -1/3$ e $f'(2) = 6$. Encontre as retas tangente e normal à curva $y = f(g(x))$, no ponto de abscissa $x = -1$.

6. Se $h(x) = [f(x)]^3 + f(x^3)$, calcule $h'(2)$, sabendo que $f(2) = 1$, $f'(2) = 7$ e que $f'(8) = -3$.

7. Suponha que a equação

$$\frac{y}{x-y} - \frac{x}{y} + \sqrt{x} = 0 \tag{5.18}$$

defina y como função de x em torno do ponto $x = 1$. Calcule $y'(1)$.

8. Se n é um número natural, qual é a derivada de ordem n da função $y = (ax+b)^n$?

9. Determine as retas tangente e normal à circunferência $x^2 + y^2 = 25$, no ponto $P_0 = (3, 4)$.

10. Mesma questão precedente, considerando, agora, a hipérbole $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ e $P_0 = (-5, 9/4)$.

11. Para cada uma das funções f definidas abaixo, comprove a existência da inversa g, determine o domínio desta última e uma expressão que a defina explicitamente. Esboce os gráficos de f e g.

(a) $f(x) = x^2 - 4,\ x \geq 0$ (b) $f(x) = x^2 - 4,\ x \leq 0$ c) $f(x) = -\sqrt{1-x},\ x \leq 1$

(d) $f(x) = \dfrac{x}{x+1},\ x > -1$ (e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1},\ x \geq 0$ (f) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1},\ x \leq 0$

12. Por meio de restrições adequadas, faça com que cada uma das funções dadas abaixo gere duas funções invertíveis f_1 e f_2, determinando, em seguida, as respectivas inversas g_1 e g_2. Calcule as derivadas dessas inversas e esboce os gráficos das funções f_1, f_2, g_1 e g_2, em cada caso.

(a) $y = x^2 - 2x - 3$ (b) $y = -x^2 + x + 2$ (c) $y = \sqrt{1-x^2}$ (d) $y = -\sqrt{4-x^2}$

13. Mostre que a função $y = f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, tem como inversa a função $x = g(y) = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$, definida para $|y| < 1$. Qual a imagem de f?

14. Determine a inversa de função $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $x \neq 1$, especificando o domínio e a imagem da inversa. Comprove diretamente a fórmula (5.15)

15. Considere a função $y = f(x) = x^2 - x - 2$, definida para $x \geq 1/2$, e seja $x = g(y)$ sua inversa.

    (a) Qual o domínio e qual a imagem de g? (b) Sabendo-se que $g(-2) = 1$, calcule $g'(-2)$

16. Use a Regra da Cadeia para mostrar que a derivada de uma função par é uma função ímpar e que a derivada de uma função ímpar é uma função par.

17. Considere a função $f(x) = |x+2|^3$.

    (a) Verifique que f é derivável em qualquer x e ache uma expressão para a derivada.

    (b) Encontre o ponto P_0 onde a tangente ao gráfico de f é horizontal.

    (c) Encontre o ponto P_0 onde o ângulo da tangente ao gráfico de f com o eixo x é 30°.

5.4 Funções Trigonométricas

As funções trigonométricas, em especial Seno e Cosseno, aparecem naturalmente no estudo de fenômenos periódicos e também no estudo de propagação de ondas. As demais funções trigonométricas: Tangente, Cotangente, Secante e Cossecante, são definidas a partir das funções Seno e Cosseno.

Seja θ um ângulo, cujo vértice é o centro comum de vários círculos, como ilustra a Figura 5.4. A razão entre o arco e o raio é sempre a mesma, isto é:

$$\frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2} = \frac{A_3B_3}{OA_3} = \frac{A_4B_4}{OA_4} = \cdots = k.$$

Esta razão constante k é a medida do ângulo θ em radianos. O ângulo de 1 radiano (anota-se 1 rad) é, portanto, o ângulo x para o qual o raio OA é igual ao arco AB.

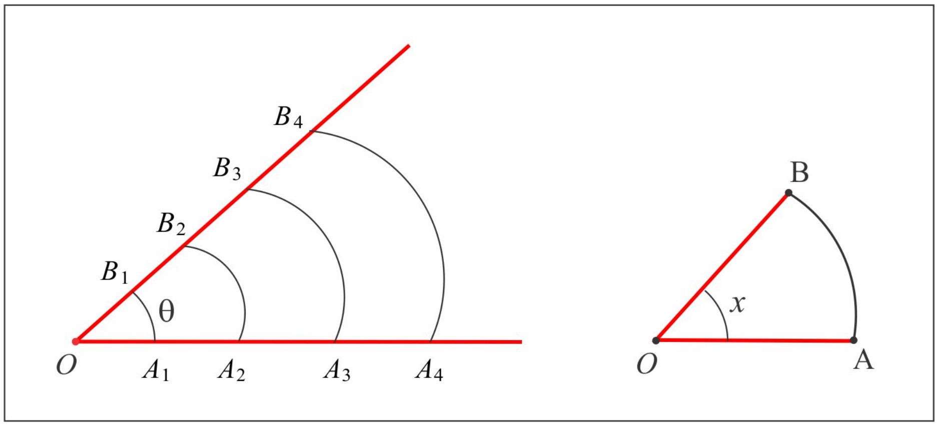


Figura 5.4: Ângulo em Radianos.

5.4.1 Seno & Cosseno

Em trigonometria as funções Seno e Cosseno são introduzidas a partir de uma circunferência no plano xy, de centro na origem e raio unitário, como ilustrado na Figura 5.5.

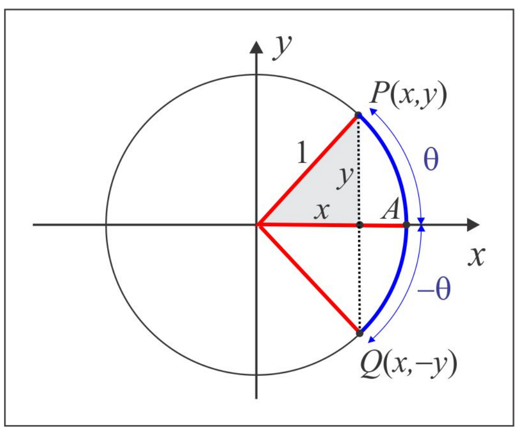


Figura 5.5: Seno & Cosseno.

O ponto de partida $A(1,0)$ é usado como referência na medida do ângulo. Dado um número real θ, marcamos sobre a circunferência o arco $\widehat{AP} = \theta$, no sentido anti-horário, se $\theta > 0$, e no sentido horário, se $\theta < 0$. Definimos o seno de θ (anota-se sin θ ou sen θ) e o cosseno de θ (anota-se $\cos\theta$) pelas relações:

$$\cos\theta = x \quad \text{(abscissa do ponto } P\text{)}$$

$$\operatorname{sen}\theta = y \quad \text{(ordenada do ponto } P\text{)}$$

e do *Teorema de Pitágoras*, segue a Identidade Fundamental:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1.} \tag{5.19}$$

Devemos tomar cuidado com as notações $\cos^2\theta$ e $\operatorname{sen}^2\theta$ que serão usadas para representar $(\cos\theta)^2$ e $(\operatorname{sen}\,\theta)^2$. A mesma notação será usada nas outras funções trigonométricas.

Além da Identidade Fundamental, outras propriedades de seno e cosseno são estabelecidas a partir da análise da Figura 5.5. Temos:

(i) $1 \le \cos\theta \le 1 \quad \text{e} \quad -1 \le \operatorname{sen}\,\theta \le 1, \quad \forall\ \theta.$

(ii) $\cos(-\theta) = \cos\theta \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\,\theta, \quad \forall\ \theta.$

(iii) $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta.$

(iv) $\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = k\pi + \dfrac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\,\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$. Daí segue que $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ não se anulam no mesmo θ.

(v) $\cos\theta = \operatorname{sen}\,\theta \Leftrightarrow \theta = k\pi + \pi/4, \quad k \in \mathbb{Z}.$

(vi) Alguns valores particulares de seno e cosseno podem ser estabelecidos a partir da definição. Por exemplo, se $\theta = \pi/6$, vemos da Figura 5.6 que o triângulo OPQ é equilátero (os ângulos internos são iguais a $\pi/3\,\text{rad}$ ou 60^{o}) e, sendo assim, $2y = 1$, isto é, $\operatorname{sen}(\pi/6) = y = 1/2$. Com este valor e com a Identidade Fundamental, encontramos $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$.

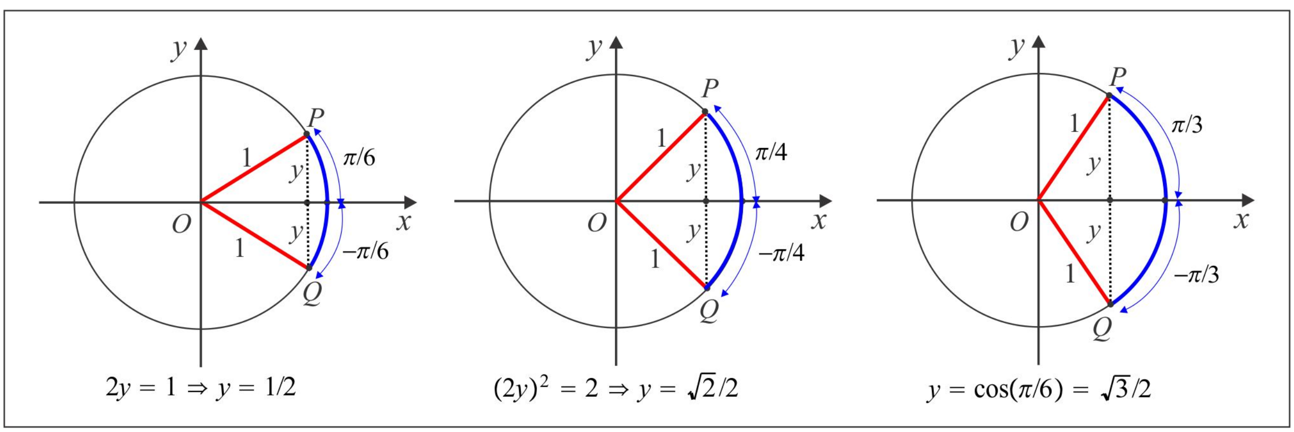


Figura 5.6: Valores de Seno e Cosseno.

A tabela abaixo mostra os valores de seno e cosseno para alguns arcos particulares:

θ (em grau)	0	30	45	60	90	180	270	360
θ (em radiano)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
$\operatorname{sen}\theta$	1	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0

Os Gráficos:

Com a notação usual $y = f(x)$ de função, construímos as funções trigonométricas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$, ambas com domínio $\mathbb{R}$, e com as propriedades estabelecidas, vamos esboçar os gráficos. O que nos dizem tais propriedades? A propriedade (i) diz que as funções seno e cosseno são limitadas: $|\cos x| \leq 1$ e $|\operatorname{sen} x| \leq 1$, seja qual for o valor de x. Os gráficos estão situados na faixa horizontal $-1 \leq y \leq 1$. Já a propriedade (ii) estabelece a paridade das funções: $y = \cos x$ é uma função par, enquanto $y = \operatorname{sen} x$ é uma função ímpar. Por fim, a propriedade (iii) nos diz que as funções seno e cosseno são periódicas com período 2π, ou 2π-periódicas, o que indica a repetição do gráfico em intervalos justapostos, de comprimento 2π. Na Figura 5.7 ilustramos no mesmo plano cartesiano os gráficos de $y = \cos x$ e $y = \operatorname{sen} x$.

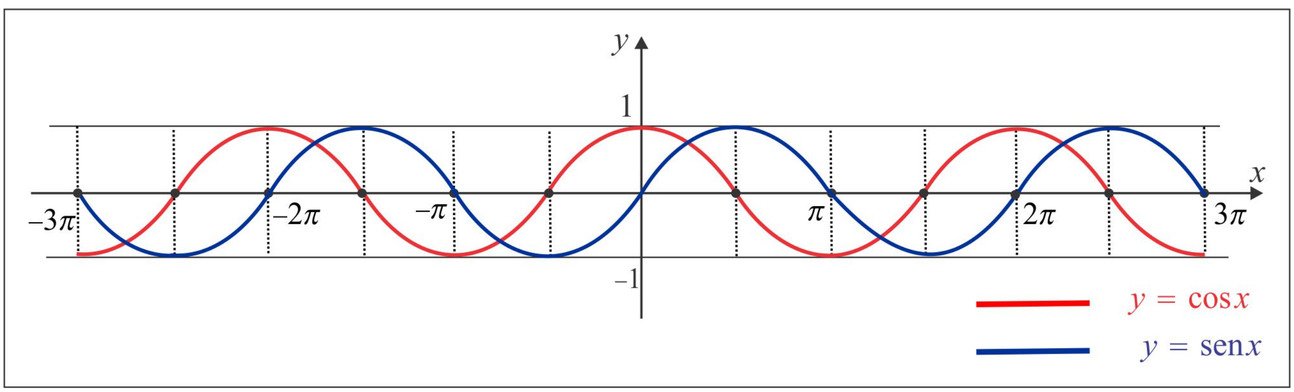


Figura 5.7: Gráficos de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$.

► **IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS BÁSICAS:**

Além da identidade fundamental, várias outras identidades trigonométricas podem ser estabelecidas sem maiores dificuldades. Vejamos as identidades relacionadas à soma e à diferença de arcos.

(1) Cosseno da Soma: $\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.}$

(2) Cosseno da Diferença: $\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.}$

(3) Seno da Soma: $\boxed{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha.}$

(4) Seno da Diferença: $\boxed{\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha.}$

Prova: Na Figura 5.8 abaixo ilustramos os arcos $\alpha = \widehat{AB}$ e $\beta = \widehat{BD}$ e em coordenadas, vemos que:

$$A(1,0), \quad C(\cos\beta, \sin\beta), \quad D(\cos(\alpha+\beta), \operatorname{sen}(\alpha+\beta)) \quad \text{e} \quad E(\cos\alpha, -\sin\alpha)$$

Para obter a identidade (1), notamos que $\text{dist}(A, D) = \text{dist}(C, E)$ e usando a fórmula da distância entre dois pontos, obtemos:

$$\boxed{\left[\cos(\alpha+\beta) - 1\right]^2 + \sin^2(\alpha+\beta) = \left(\cos\alpha - \cos\beta\right)^2 + \left(\sin\alpha + \sin\beta\right)^2.} \tag{5.20}$$

Efetuando os produtos notáveis e usando a Identidade Fundamental (5.19) chegamos, após as simplificações, à identidade (1).

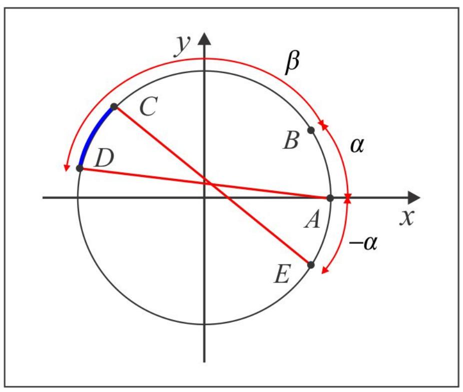


Figura 5.8: Soma de Arcos.

Para comprovar (2), basta trocar β por $-\beta$ e usar a paridade de seno e cosseno. Da relação (2) resulta que $\cos(x - \pi/2) = \operatorname{sen} x$, $\forall\, x$, e trocando x por $x - \pi/2$, obtemos $\operatorname{sen}(x - \pi/2) = -\cos x$. Assim:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \cos\left[\alpha + (\beta - \pi/2)\right] \\ &= \cos\alpha\cos(\beta - \pi/2) - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\beta - \pi/2) \\ &= \cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \end{aligned}$$

e chegamos à identidade (3). Se em (3) trocarmos β por $-\beta$, obteremos a identidade (4).

EXEMPLO 5.4.1 *Como consequência dos resultados obtidos até agora, temos*:

(i) *Cosseno do arco duplo*: $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$.

$$\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x. \tag{5.21}$$

(ii) *Seno do arco duplo*: $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.

$$\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}(x + x) = \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x = 2 \operatorname{sen} x \cos x. \tag{5.22}$$

(iii) *Da Identidade Fundamental* (5.19) *e de* (5.21), *deduzimos as relações*:

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}} \quad e \quad \boxed{sen^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.} \tag{5.23}$$

5.4.2 Derivando Seno & Cosseno

O quociente de Newton da função $y = \operatorname{sen} x$, vem dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} &= \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) \operatorname{sen} x + \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right) \cos x \end{aligned}$$

e no cálculo da derivada, nos deparamos com dois limites fundamentais:

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right) \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0} \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right).$$

► 1º LIMITE FUNDAMENTAL: $\boxed{\lim_{t \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right) = 1.}$

Prova: Vamos considerar um arco t entre 0 e $\pi/2$, como ilustrado na Figura 5.9, o que é razoável tendo em vista que $t \to 0$. Comparando as áreas dos triângulos OBC, OAD e do setor circular OAC, notando que $OB = \cos t$, e $BC = \operatorname{sen} t$, temos:

$$\frac{OB \times OC}{2} < \frac{t \times OA}{2} < \frac{OA \times AD}{2},$$

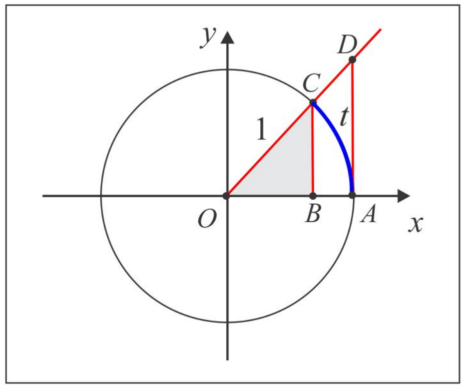


Figura 5.9: 1º Limite Fundamental.

e a partir da semelhança dos triângulos OAD e OBC, encontramos:

$$\frac{AD}{OA} = \frac{BC}{OB} = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}.$$

Dessa forma, obtemos:

$$\frac{\cos t}{2} < \frac{t}{2} < \frac{\operatorname{sen} t}{2\cos t} \Leftrightarrow \cos t < \frac{t}{\operatorname{sen} t} < \frac{1}{\cos t}. \tag{5.24}$$

Fazendo $t \to 0$ em (5.24) e usando a propriedade do confronto, chegamos a:

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right) = 1.$$

e para concluir, notamos que:

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right) = \left[\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)\right]^{-1} = 1.$$

► 2º LIMITE FUNDAMENTAL: $\boxed{\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right) = 0.}$

Prova: A substituição direta de t por zero nos remete à forma indeterminada $0/0$. Temos:

$$\frac{1-\cos t}{t} = \frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{t(1+\cos t)} = \frac{1-\cos^2 t}{t+\cos t} = \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t+\cos t} \tag{5.25}$$

e fazendo $t \to 0$ em (5.25) chegamos ao resultado.

Usando os Limites Fundamentais, obtemos:

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen} x)' &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x \cos\ h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h}\right) \\ &= (\operatorname{sen} x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos\ h - 1}{h}\right) + (\cos x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right) = \cos x.\end{aligned}$$

Para derivar o Cosseno, notamos que $\cos x = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$ e usando a Regra da Cadeia, com $u = x + \pi/2$, obtemos:

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= [\operatorname{sen}(x+\pi/2)]' = (x+\pi/2)' \cos(x+\pi/2) \\ &= \operatorname{sen}(x+\pi/2) = -\operatorname{sen} x\end{aligned}$$

Se $u = u(x)$ é uma função derivável, então, como consequência da Regra da Cadeia, obtemos as seguintes regras de derivação:

$$\boxed{(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u)} \quad \text{e} \quad \boxed{(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u} \tag{5.26}$$

EXEMPLO 5.4.2 *Calcular $f'(0)$, sendo $f(x) = \cos^2(x^2 + x)$.*

Solução: Se $u = x^2 + x$, então $f(x) = (\cos u)^2$ e pelas Regras da Potência e da Cadeia, chegamos a:

$$f'(x) = (2\cos u)(\operatorname{sen} u)\, u' = 2\cos(x^2+x) \operatorname{sen}(x^2+x)(2x+1) \Rightarrow f'(0) = 0.$$

EXEMPLO 5.4.3 *Vamos derivar a função $f(x) = \operatorname{sen}(x^2+1) - \cos(2x)$.*

Solução: Usando as regras (5.26), encontramos:

$$\left[\operatorname{sen}(x^2+1)\right]' = 2x\cos(x^2+1) \quad \text{e} \quad \left[\cos(2x)\right]' = -2\operatorname{sen}(2x)$$

e, assim, obtemos:

$$f'(x) = 2x\cos(x^2+1) + 2\operatorname{sen}(2x).$$

5.4.3 Outras Funções Trigonométricas

▶ FUNÇÃO TANGENTE:

A função Tangente $y = \tan x$ é definida para $x \neq k\pi + \pi/2$ pela regra:

$$\boxed{\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.} \tag{5.27}$$

A função tangente, também representada por $y = \tan x$, goza das seguintes propriedades:

(i) Nos arcos $x = k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$, temos $\operatorname{sen} x = 0$ e, portanto, $\tan(k\pi) = 0$.

(ii) Se $x \neq n\pi + \pi/2, \quad n \in \mathbb{Z}$, então $\tan(x + k\pi) = \tan x$, o que nos diz que a função tangente é π-periódica.

$$\tan(x + k\pi) = \frac{\operatorname{sen}(x + k\pi)}{\cos(x + k\pi)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x} = \tan x.$$

(iii) No intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ a função tangente é injetiva e tem os limites laterais:

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \tan x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to (-\pi/2)^+} \tan x = -\infty$$

O Gráfico:

Na Figura 5.10 ilustramos o gráfico de $y = \tan x$, no intervalo $-5\pi/2 < x < 5\pi/2$, com $x \neq \pm\pi/2$ e $x \neq \pm 3\pi/2$, onde observamos a repetição do gráfico nos intervalos justapostos de comprimento π, que é o *período* da função $y = \tan x$.

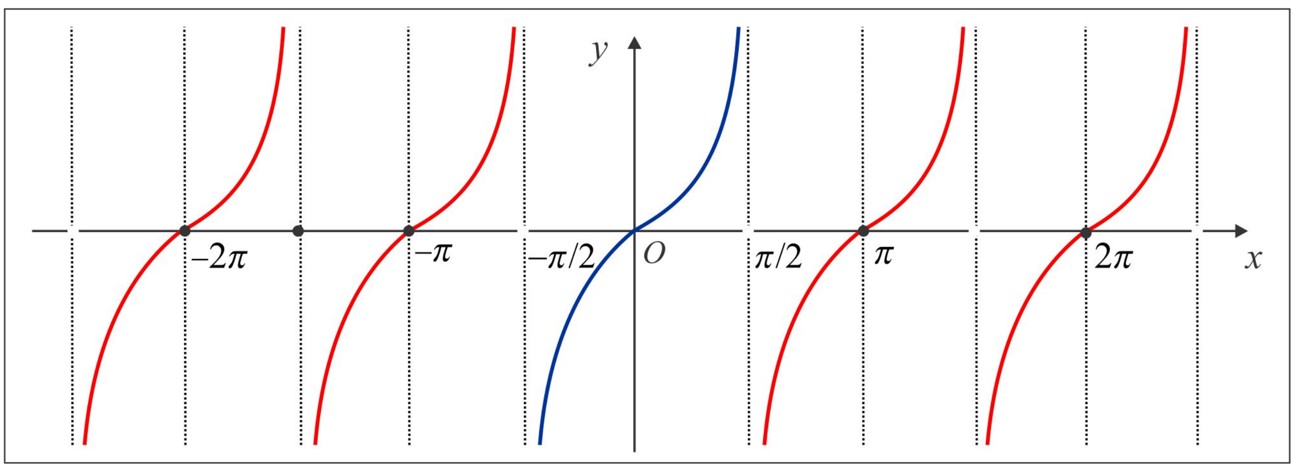


Figura 5.10: Função Tangente.

► FUNÇÃO COTANGENTE:

A função Cotangente é definida pela regra:

$$\boxed{\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.} \tag{5.28}$$

A função cotangente, também representada por $\operatorname{cotan} x$ ou $\cot x$, goza das seguintes propriedades:

(i) $\operatorname{cotg}(k\pi + \pi/2) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}$, tendo em vista que $\cos(k\pi + \pi/2) = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

(ii) Se $x \neq k\pi$, então $\operatorname{cotg}(x + \pi) = \operatorname{cotg} x$. Assim como a tangente, a função cotangente é π-periódica:

$$\operatorname{cotg}(x + \pi) = \frac{\cos(x + \pi)}{\operatorname{sen}(x + \pi)} = \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotg} x.$$

(iii) No intervalo $(0, \pi)$ a função cotangente é injetiva e tem os limites laterais:

$$\lim_{x \to \pi^-} \tan x = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} \tan x = +\infty.$$

O Gráfico:

Na Figura 5.11 ilustramos graficamente a função $y = \operatorname{cotg} x$, no intervalo $-5\pi/2 < x < 5\pi/2$, com $x \neq \pm\pi$ e $x \neq \pm 2\pi$, e a periodicidade da função nos permite visualizar o gráfico além desse intervalo.

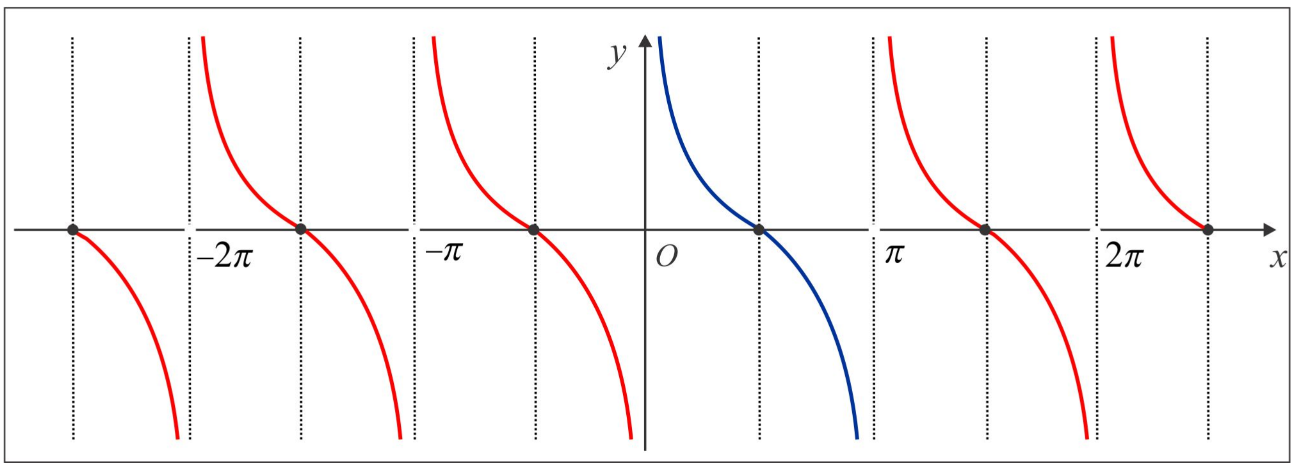


Figura 5.11: Função Cotangente.

► FUNÇÃO SECANTE:

A função Secante, indicada por $y = \sec x$, é definida para $x \neq k\pi + \pi/2, \;\; k \in \mathbb{Z}$, pela regra:

$$\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x}} \tag{5.29}$$

e goza das seguintes propriedades:

(i) $|\sec x| \geq 1$, tendo em vista que $|\cos x| \leq 1$.

(ii) $\sec(x + 2\pi) = \sec x, \quad x \neq k\pi + \pi/2, \;\; k \in \mathbb{Z}.$

(iii) No domínio $\mathcal{D} = [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ a função $y = \sec x$ é injetiva, com limites laterais:

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \sec x = +\infty, \quad \lim_{x \to (\pi/2)^+} \sec x = -\infty, \quad \lim_{x \to (-\pi/2)^-} \sec x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to (-\pi/2)^+} \sec x = -\infty.$$

(iv) $\sec(k\pi) = (-1)^k, \;\; k \in \mathbb{Z}.$

O Gráfico:

Na Figura 5.12 ilustramos o gráfico de $y = \sec x$, com $-5\pi/2 < x < 5\pi/2, \;\; x \neq \pm\pi/2$ e $\pm 3\pi/2$.

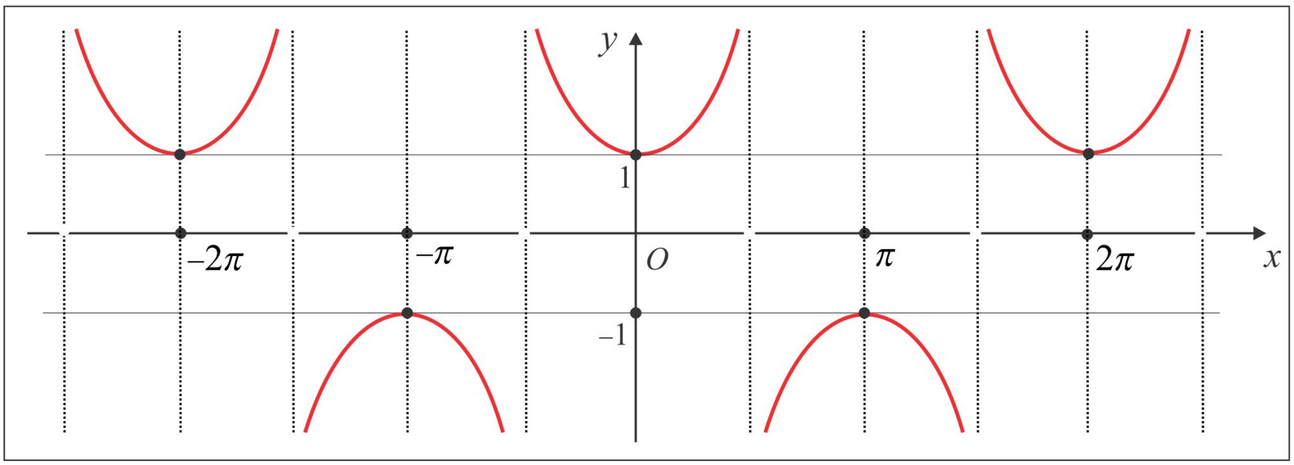


Figura 5.12: Função Secante.

▶ **FUNÇÃO COSSECANTE:**

A função Cossecante, indicada por $y = \operatorname{cosec} x$, é definida para $x \neq k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$, pela regra:

$$\boxed{\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.} \tag{5.30}$$

As seguintes propriedades da função $y = \operatorname{cosec} x$ podem ser facilmente deduzidas a partir da definição.

(i) $|\operatorname{cosec} x| \geq 1, \quad x \neq k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$, já que $|\operatorname{sen} x| \leq 1, \quad \forall \; x.$

(ii) $\operatorname{cosec}(x + 2\pi) = \operatorname{cosec} x$. De fato:

$$\operatorname{cosec}(x + 2\pi) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x + 2\pi)} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cosec} x, \quad x \neq k\pi.$$

(iii) No domínio $\mathcal{D} = [-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$ a função $\operatorname{cosec} x$ é injetiva e possui os seguintes limites laterais:

$$\lim_{x \to \pi^-} \operatorname{cosec} x = +\infty, \quad \lim_{x \to -\pi^-} \operatorname{cosec} x = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} \operatorname{cosec} x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} \operatorname{cosec} x = -\infty.$$

O Gráfico:

A Figura 5.13 ilustra graficamente a função $y = \operatorname{cosec} x$, com $-5\pi/2 < x < 5\pi/2$, $x \neq 0$ e $x \neq \pm 2\pi$.

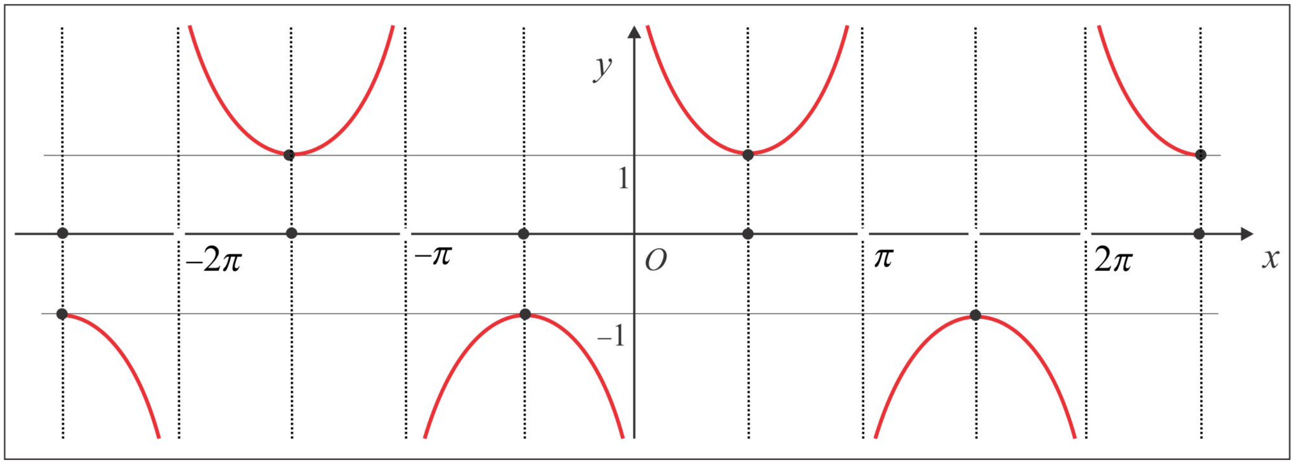


Figura 5.13: Função Cossecante.

As informações sobre as funções trigonométricas usadas nas ilustrações gráficas foram útieis, mas, ítens como: concavidade do gráfico, crescimento ou decrescimento da função e os pontos extremos (valores máximos ou mínimos) precisam ser formalizadas. Isto será tratado na Unidade 6.

► AS DERIVADAS:

Com as derivadas de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, usamos a regra do quociente e encontramos as derivadas das demais funções trigonométricas. As regras de derivação generalizadas são obtidas com a Regra da Cadeia, considerando $u = u(x)$ uma função derivável em intervalos adequados.

Derivada da Tangente:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - \operatorname{sen} x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \tag{5.31}$$

Combinando (5.31) com a Regra da Cadeia, obtemos a seguinte regra de derivação:

$$\boxed{\frac{d}{dx}[\tan u] = u' \cdot \sec^2 u.} \tag{5.32}$$

Derivada da Cotangente:

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{(\cos x)' \operatorname{sen} x - \cos x\,(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x. \tag{5.33}$$

Combinando (5.33) com a Regra da Cadeia, obtemos:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\operatorname{cotg} u\right] = -u' \cdot \operatorname{cosec}^2 u.} \tag{5.34}$$

Derivada da Secante:

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \sec x \operatorname{tg} x. \tag{5.35}$$

Combinando (5.35) com a Regra da Cadeia, obtemos:

$$\boxed{\left(\sec u\right)' = u' \cdot \sec u\ \cdot \operatorname{tg} u.} \tag{5.36}$$

Derivada da Cossecante:

$$(\operatorname{cosec} x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{-(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen} x}\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x. \tag{5.37}$$

A regra decorrente da combinação de (5.37) com a Regra da Cadeia é:

$$\boxed{\left(\operatorname{cosec} u\right)' = -u' \cdot \operatorname{cosec} u\ \cdot \operatorname{cotg} u.} \tag{5.38}$$

EXEMPLO 5.4.4 *Calcular $f'(\pi)$, sendo $f(x) = \sec x + x \operatorname{tg} x$.*

Solução: Temos:

$$f'(x) = (\sec x \operatorname{tg} x) + \left(\operatorname{tg} x + x \sec^2 x\right)$$

e considerando $x = \pi$, obtemos $f'(\pi) = (\sec \pi \operatorname{tg} \pi) + \left(\operatorname{tg} \pi + \pi \sec^2 \pi\right) = \pi$

EXEMPLO 5.4.5 *Calcular a derivada da função $y = \cos(x^2 + 3x) - 3\operatorname{tg}(\sqrt{x}) + \sec^3(x^2)$.*

Solução: A função $y = y(x)$ é a soma de 3 funções elementares e primeiro usaremos a regra da soma. Temos:

$$\begin{aligned} y' &= -\operatorname{sen}\left(x^2+3x\right)(2x+3) - 3\sec^2\left(\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + 3\sec^2\left(x^2\right)\sec\left(x^2\right)\operatorname{tg}\left(x^2\right)(2x) \\ &= -(2x+3)\operatorname{sen}\left(x^2+3x\right) - \frac{3\sec^2\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}} + 6x\sec^3\left(x^2\right)\operatorname{tg}\left(x^2\right). \end{aligned}$$

5.4.4 Funções Trigonométricas Inversas

Nesta seção, vamos considerar o problema de inverter as funções seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante. Considerando que estas funções não são injetivas em seus respectivos domínios, devemos restringi-las a domínios adequados, de modo a torná-las invertíveis (bijetoras). A derivada da função $x = g(y)$, inversa de $y = f(x)$, é determinada com auxílio da regra:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \tag{5.39}$$

no intervalo onde $f'(x) \neq 0$.

► FUNÇÃO ARCOSENO:

Consideremos a função $y = f(x) = \operatorname{sen} x$, no domínio $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, onde ela é injetiva, como ilustra a Figura 5.14. A inversa $x = g(y)$, $-1 \leq y \leq 1$, recebe o nome de *arcoseno* (dizemos "x é o arco cujo seno é y") e anotamos: $x = \operatorname{arcsen} y.$

Com base na relação:

$$\boxed{y = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow x = \operatorname{arcsen} y.}$$

construímos a tabela de valores:

x	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/6$	$\pi/2$
$y = \operatorname{sen} x$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	-0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	1
$x = \operatorname{arcsen} y$	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/6$	$\pi/2$

A Derivada:

Considerando que $f(x) = \operatorname{sen} x$, temos:

$$f'(x) = \cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1 - y^2},$$

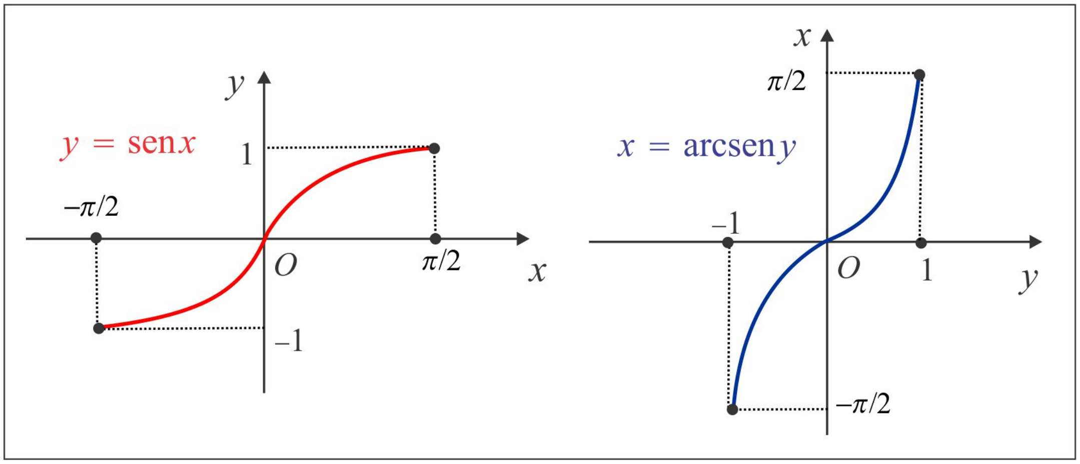


Figura 5.14: $y = \operatorname{sen} x$ e $x = \operatorname{arcsen} y$.

e da relação (5.39) resulta:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad -1 < y < 1. \tag{5.40}$$

Dada uma função derivável $u = u(y)$, com $-1 < u < 1$, combinamos (5.40) e a Regra da Cadeia e chegamos à regra de derivação:

$$\boxed{\frac{d}{dy}\left(\operatorname{arcsen} u\right) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \quad -1 < u < 1.} \tag{5.41}$$

OBSERVAÇÃO 5.4.6 *Qualquer intervalo onde a função $y = \operatorname{sen} x$ for injetiva pode ser usado para a inversão. Por exemplo, no intervalo $\pi/2 \le x \le 3\pi/2$ a função $y = \operatorname{sen} x$ é injetiva, com inversa $x = g_1(y) = \operatorname{arcsen} y$. Neste caso, a derivada $g_1'(y)$ é dada por:*

$$g_1'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad -1 < y < 1,$$

e o sinal negativo na derivada decorre do fato que $\cos x = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$, $\pi/2 \le x \le 3\pi/2$.

► **FUNÇÃO ARCOCOSSENO:**

Na Figura 5.15 ilustramos os gráficos da função invertível $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi$, e da sua inversa $x = \arccos y$, $-1 \le y \le 1$. Temos a relação:

$$\boxed{y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y}$$

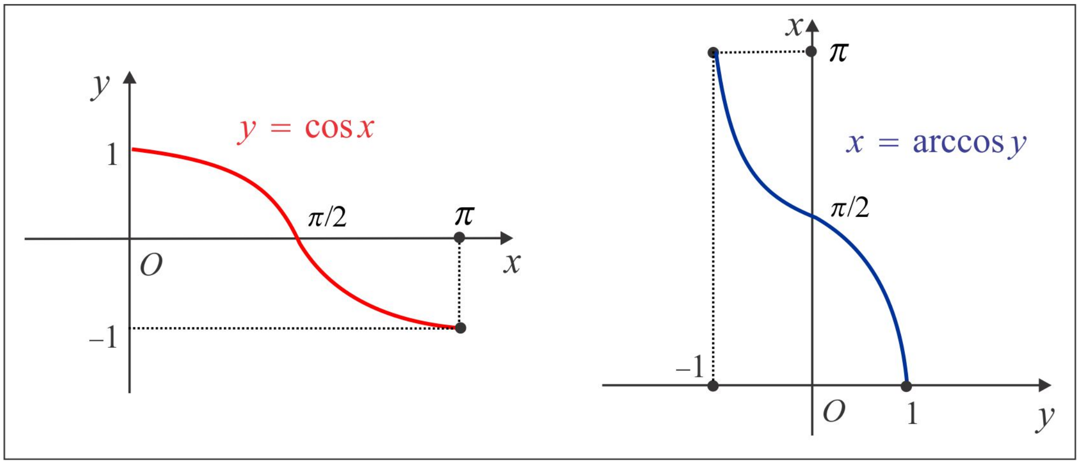


Figura 5.15: $y = \cos x$ e $x = \arccos y$.

A Derivada:

No intervalo $0 \leq x \leq \pi$, temos $\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$ e da relação (5.39), com $f(x) = \cos x$ e $g(y) = \arccos y$, encontramos:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{-\operatorname{sen} x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad -1 < y < 1,$$

e combinando com a Regra Cadeia, temos a regra de derivação:

$$\boxed{\frac{d}{dy}\left(\arccos u\right) = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad -1 < u < 1.} \tag{5.42}$$

Mais uma vez ressaltamos a importância de fixar um intervalo no qual a função $y = \cos x$ é injetiva. Na discussão acima fixamos o intervalo $0 \leq x \leq \pi$.

► FUNÇÃO ARCOTANGENTE:

A Figura 5.16 ilustra o gráfico da função $y = f(x) = \operatorname{tg} x$, no intervalo $-\pi/2 < x < \pi/2$, onde ela é injetiva, e da sua inversa $x = g(y) = \operatorname{arctg} y$, com domínio $\mathbb{R}$ e imagem o intervalo $-\pi/2 < x < \pi/2$.

A Derivada:

Considerando $f(x) = \tan x$, temos $f'(x) = 1 + \tan^2 x = 1 + y^2$ e assim:

$$\frac{d}{dy}\left(\arctan y\right) = g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1 + y^2}, \quad -\infty < y < \infty.$$

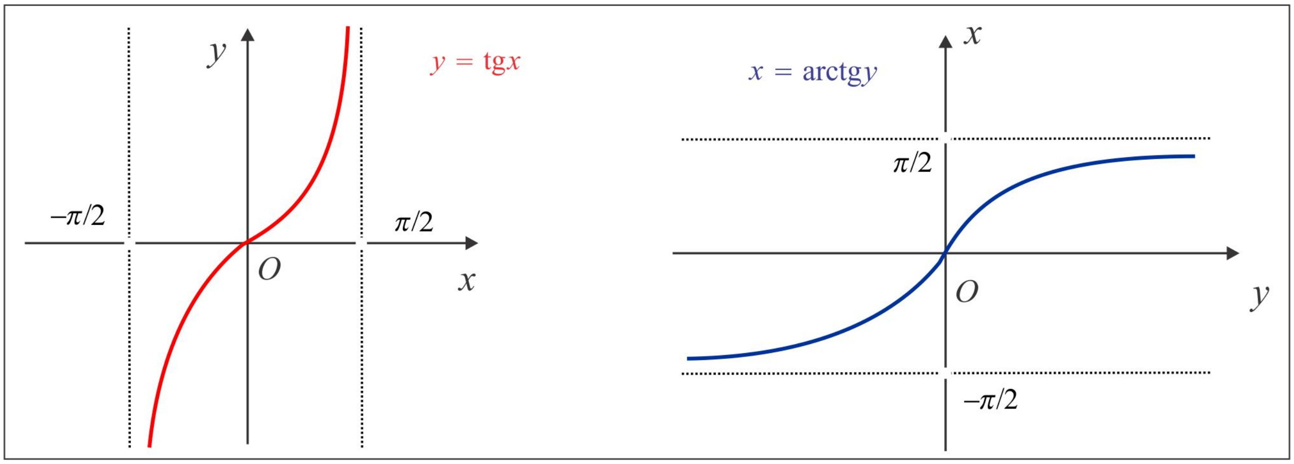


Figura 5.16: $y = \operatorname{tg} x$ e $x = \operatorname{arctg} y$.

A Regra da Cadeia nos conduz à regra de derivação:

$$\boxed{\frac{d}{dy}(\arctan u) = \frac{u'}{1+u^2}, \quad -\infty < u < \infty.}$$

► **FUNÇÃO ARCOCOTANGENTE:**

Seja $y = f(x) = \operatorname{cotg} x,\ 0 < x < \pi$, com inversa $x = g(y) = \operatorname{arccotg} y,\ -\infty < y < \infty$, como ilustrado na Figura 5.17.

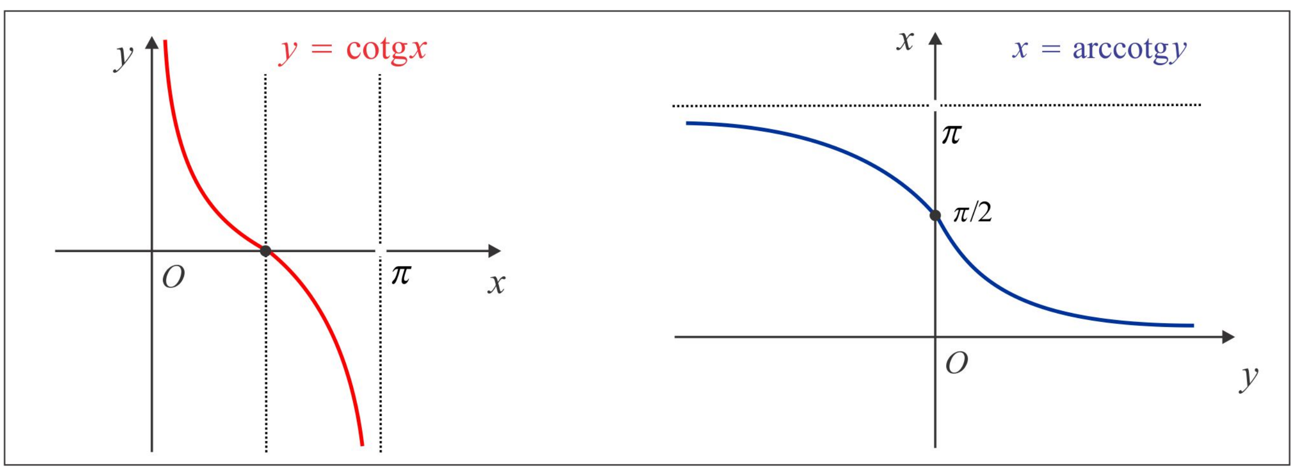


Figura 5.17: $y = \operatorname{cotg} x$ e $x = \operatorname{arccotg} y$.

A Derivada:

Usando a identidade trigonométrica $1+\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$, segue que $f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x = -(1+y^2)$ e assim chegamos à seguinte regra de derivação:

$$\frac{d}{dy}(\operatorname{arccotg} y) = g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x} = -\frac{1}{1+y^2}, \quad -\infty < y < \infty. \tag{5.43}$$

Combinando (5.43) com a Regra da Cadeia, chegamos à regra de deivação:

$$\boxed{\frac{d}{dy}(\operatorname{arccotg} u) = -\frac{u'}{1+u^2}, \quad -\infty < u < \infty.} \tag{5.44}$$

OBSERVAÇÃO 5.4.7 *Observando a Figura 5.17 deduzimos, a partir do gráfico da função* $x = \operatorname{arccotg} y$, *os seguintes fatos*:

$$\lim_{y\to\infty}(\operatorname{arccotg} y) = 0 \quad e \quad \lim_{y\to-\infty}(\operatorname{arccotg} y) = \pi.$$

Suponhamos que a função $y = \operatorname{cotg} x$ *fosse definida no domínio* $\mathcal{D} = (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2)$ *onde ela é injetiva. Neste caso, além da inversa* $x = \operatorname{arccotg} y$ *não ser contínua, e muito menos derivável, em* $y = 0$, *teríamos*:

$$\lim_{y\to\pm\infty}(\operatorname{arccotg} y) = 0.$$

Na Figura 5.18 ilustramos graficamente a situação.

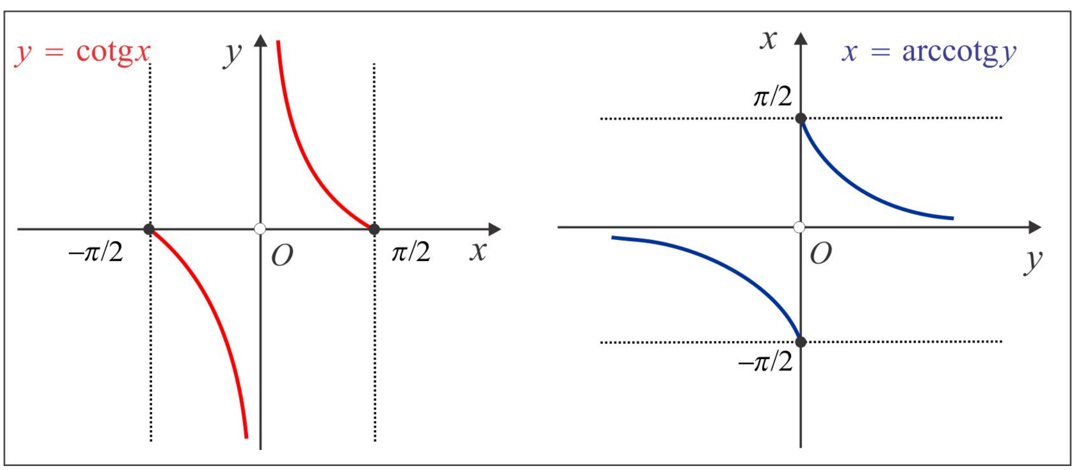


Figura 5.18: $y = \operatorname{cotg} x$ e $x = \operatorname{arccotg} y$.

► **FUNÇÃO ARCOSECANTE:**

Vamos considerar a função $y = f(x) = \sec x$, com domínio $\mathcal{D} = [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$, onde ela é injetiva, e imagem $\mathcal{I} = (-\infty, -1] \cup [1, = \infty)$, como ilustrado na Figura 5.19. A inversa $x = g(y)$ é representada por $x = \operatorname{arcsec} y$ e temos:

$$\boxed{y = \sec x \Leftrightarrow x = \operatorname{arcsec} y, \quad |y| > 1.} \tag{5.45}$$

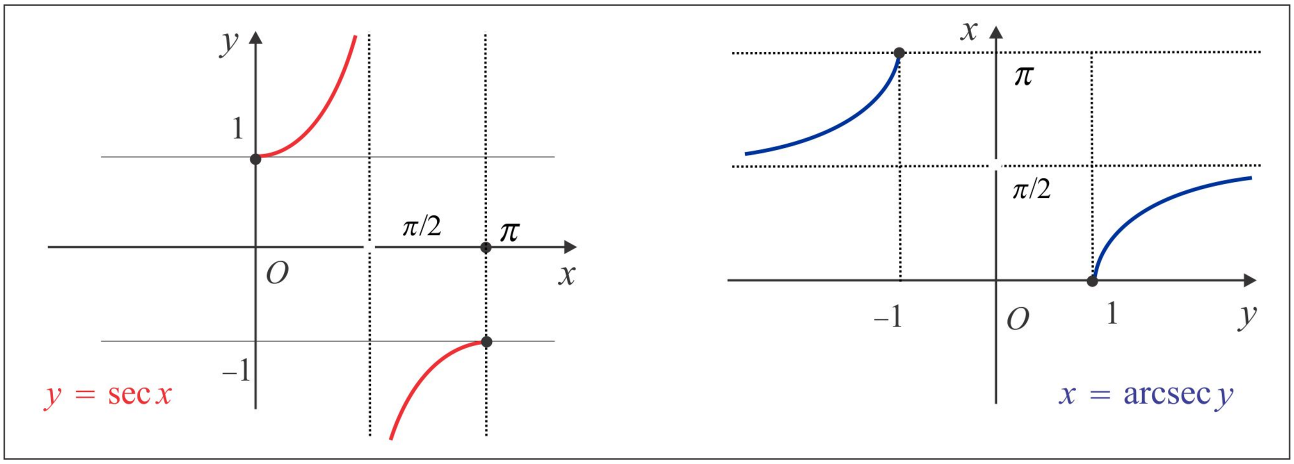


Figura 5.19: $y = \sec x$ e $x = \operatorname{arcsec} y$.

A Derivada:

Recordemos que $f'(x) = \sec^2 x \operatorname{sen} x = y^2 \operatorname{sen} x$ e, no domínio considerado, temos:

$$y^2 \operatorname{sen} x = y^2 \sqrt{1 - \cos^2 x} = y^2 \sqrt{1 - 1/y^2} = |y| \sqrt{y^2 - 1}$$

e assim, obtemos:

$$\boxed{\frac{1}{dy}(\operatorname{arcsec} y) = g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{y^2 \operatorname{sen} x} = \frac{1}{|y|\sqrt{y^2 - 1}}, \quad |y| > 1.} \tag{5.46}$$

► **FUNÇÃO ARCOCOSECANTE:**

A função $y = f(x) = \operatorname{cosec} x$, definida no domínio $\mathcal{D} = [-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$ é uma bijeção sobre a imagem $\mathcal{I} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Os gráficos das funções $y = \operatorname{cosec} x$ e da sua inversa $x = g(y) = \operatorname{arccosec} y$, $|y| \geq 1$, estão ilustrados na Figura 5.20.

A Derivada:

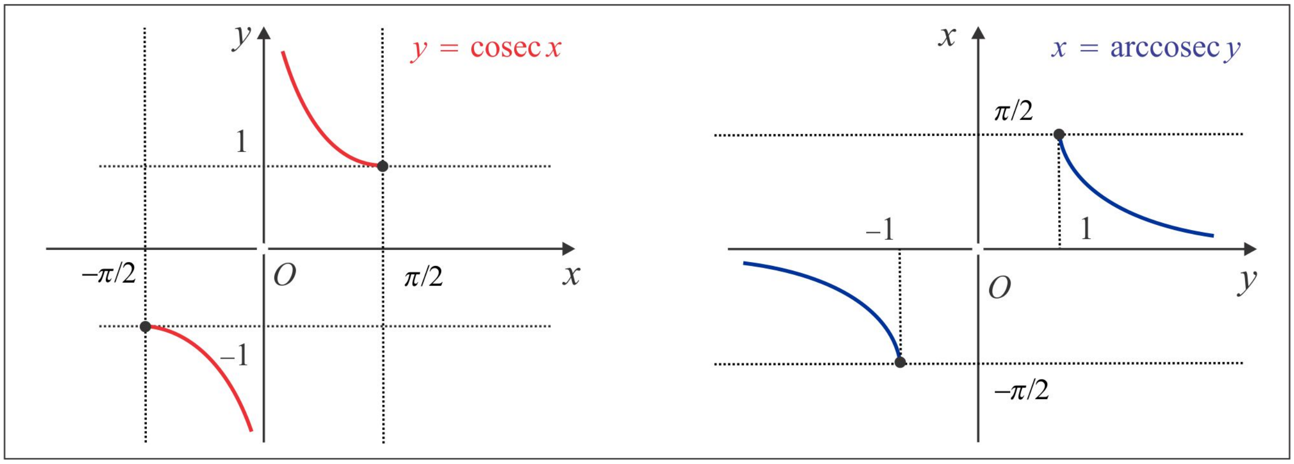


Figura 5.20: $y = \operatorname{cosec} x$ e $x = \operatorname{arccosec} y$.

O cálculo da derivada de $g(y) = \operatorname{arccosec} y$ é similar ao caso precedente e deixaremos os detalhes como parte do processo de treinamento. Temos:

$$\boxed{\frac{d}{dy}(\operatorname{arccosec} y) = -\frac{1}{|y|\sqrt{y^2-1}}, \quad |y| > 1.}$$

Veja o quadro de derivadas abaixo, onde a função $u = u(x)$ é derivável, com imagem contida no interior do domínio da função trigonométrica correspondente, conforme indicado na 3ª coluna da tabela.

Arcoseno	$(\operatorname{arcsen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-1 < u < 1$
Arcocosseno	$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-1 < u < 1$
Arcotangente	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$	$-\infty < u < \infty$
Arcocotangente	$(\operatorname{arccotg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$	$-\infty < u < \infty$
Arcosecante	$(\operatorname{arcsec} u)' = \frac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$	$\lvert u\rvert > 1$
Arcocossecante	$(\operatorname{arccosec} u)' = -\frac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$	$\lvert u\rvert > 1$

EXEMPLO 5.4.8 *Calcular* $y'(0)$, *sendo* $y = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x+1}\right)$.

Solução: Usando a tabela, com $u = \sqrt{x+1}$, obtemos:

$$y' = \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)'}{1+\left(\sqrt{x+1}\right)^2} = \frac{1}{2(2+x)\sqrt{x+1}}. \tag{5.47}$$

e considerando $x = 0$ em (5.47), encontramos $y'(0) = 1/4$.

► **ESCREVENDO PARA APRENDER 5.4**

1. Considere as funções $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(1/x)$ e $g(x) = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$, definidas, respectivamente, para $x > 0$ e para $x \in [-1,1]$. Mostre que $f'(x) = 0,\ \forall\ x > 0$, e que $g'(x) = 0,\ \forall\ x \in (-1,1)$ e lembrando que as funções constantes são aquelas possuem derivada nula, deduza que $f(x) = \pi/2$, $\forall x > 0$, e que $g(x) = \pi/2$, $\forall x \in [-1,1]$.

2. Se f é uma função derivável, tal que $f(2) = 1$ e $f'(2) = 1/2$, determine a equação da reta tangente à curva $y = \operatorname{arctg}[f(x)]$, no ponto de abscissa $x = 2$.

3. Para cada uma das funções dadas abaixo, calcule o limite quando $x \to 0$.

   (a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$ (b) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{3x}$ (c) $f(x) = \dfrac{\tan x}{\operatorname{sen} x}$

   (d) $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{1+\operatorname{sen} x}$ (e) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{x}$ (f) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(2x^2\right)}{3x}$

   (g) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^3)}{x^3}$ (h) $f(x) = \dfrac{x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(2x^2)}$ (i) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x}{x \operatorname{sen} 3x}$

4. Calcule y' sabendo que $y = y(x)$ é definida pela equação:

   (a) $4 \cos x \operatorname{sen} y = 1$ (b) $xy = \operatorname{cotg}(xy)$.

5. Encontre a reta tangente e a reta normal ao gráfico de $y = 1 + \operatorname{tg} x$, no ponto de abscissa $x = 0$.

6. Repita o exercício precedente com a função $y = 2 + \operatorname{arctg}(x+1)$.

7. Suponha que f seja uma função derivável em seu domínio D e que, para todo x em D, satisfaça $xf(x) + \operatorname{sen}[f(x)] = 4$. Se $x + \cos[f(x)] \neq 0$, mostre que $f'(x) = \dfrac{-f(x)}{x + \cos[f(x)]}$.

8. Em cada caso, encontre a expressão da derivada $\dfrac{dy}{dx}$.

(a) $y = (3 - 2\operatorname{sen} x)^5$ (b) $y = 2x + 5\cos^3 x$ (c) $y = x \operatorname{arcsen} x$

(d) $y = \dfrac{1+\cos(2x)}{1-\cos(2x)}$ (e) $y = \operatorname{sen}(3x) + \cos(x/5) + \operatorname{tg}(\sqrt{x})$ (f) $y = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

(g) $y = \sqrt{\dfrac{3\operatorname{sen} x - 2\cos x}{5}}$ (h) $y = \dfrac{(x^2+1)\operatorname{arctg} x - x}{2}$ (i) $y = x \sec(x+1)$

5.5 Logaritmos & Expoentes

Dado um número real positivo x, representemos por $A(x)$ o valor numérico da área delimitada pelo eixo t, pelo gráfico da hipérbole $y = 1/t$ e pelas retas verticais $t = 1$ e $t = x$. Na Figura 5.21 ilustramos a área $A(x)$, nos dois casos possíveis: $x \geq 1$ e $0 < x < 1$. É claro que $A(1) = 0$.

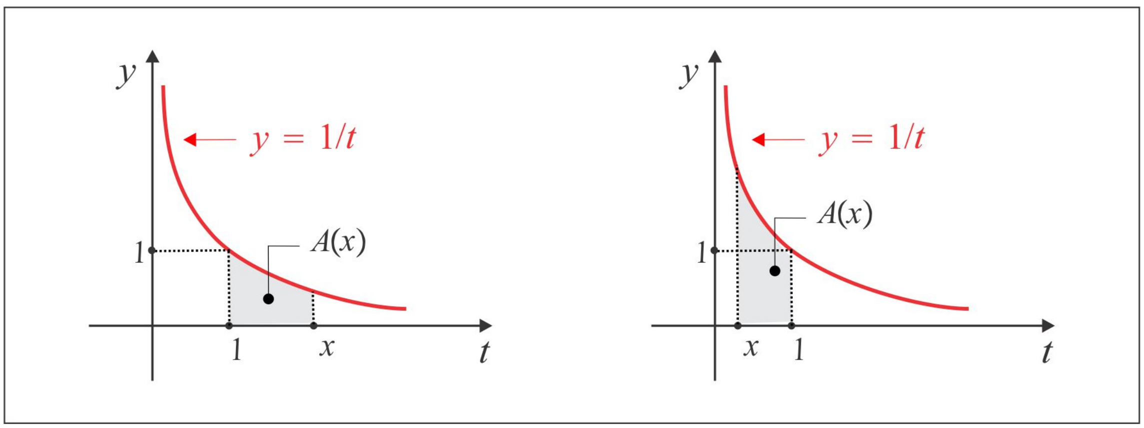


Figura 5.21: A área $A(x)$.

O Logaritmo Natural de x, representado por $\ln x$, é, por definição, o número real dado por:

$$\ln x = \left|\begin{array}{ll} A(x), & \text{se } x \geq 1 \\ -A(x), & \text{se } 0 < x < 1. \end{array}\right.$$

Assim, construímos a função $y = \ln x$ com domínio $\mathcal{D} = (0, +\infty)$ e imagem $\mathcal{I} = \mathbb{R}$, tal que $\ln 1 = 0$.

► **A DERIVADA DO LOGARITMO:**

O Número de Néper (ou neperiano), representado pela letra e, é aquele número cujo logaritmo natural é igual a 1, isto é, $\ln e = 1$. O neperiano e é um número irracional entre 2 e 3 e normalmente se usa a aproximação $e \approx 2.71$. Ela é a base do sistema de logaritmo natural e a notação $\ln x$ às vezes é substituída por $\log x$ ou $\log_e x$, esta último muito pouco usada.

A forma como foi definido o logaritmo vai tornar o cálculo da derivada bastante simples e esta foi a razão da nossa escolha. Usaremos a propriedade do confronto para limites e mostraremos que a derivada de $\ln x$ é $1/x$, $\;x > 0$. De fato, o quociente de Newton de $y = \ln x$ será analisado por observação da Figura 5.22, onde admitimos $x > 1$ e o infinitésimo $h > 0$. Raciocínio similar se aplica nos casos em que $0 < x < 1$ e $h < 0$.

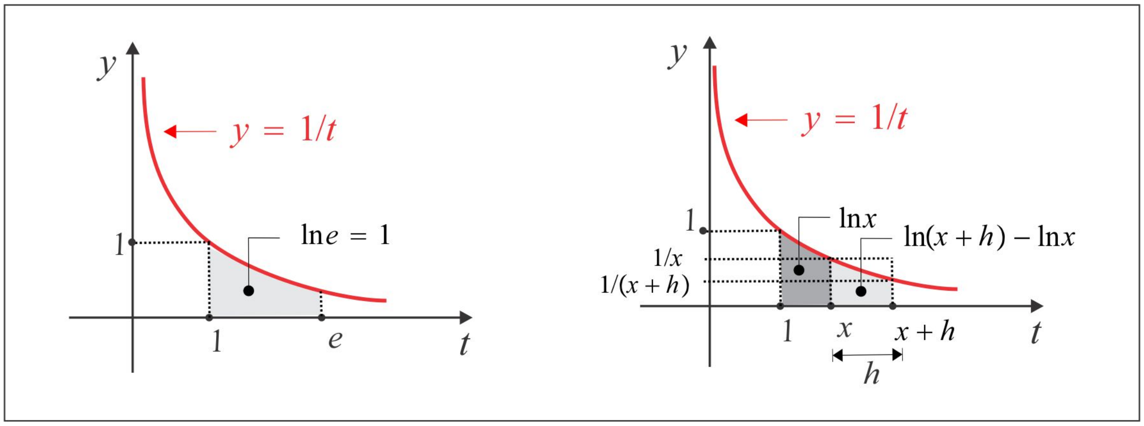


Figura 5.22: Comparação de áreas.

A área mais clara do gráfico, que tem valor $\ln(x+h) - \ln x$ é interceptada por dois retângulos: o maior de base h e altura $\dfrac{1}{x}$ e o menor de base h e altura $\dfrac{1}{x+h}$. Comparando as áreas, temos:

$$\frac{h}{x+h} \le \ln(x+h) - \ln x \le \frac{h}{x} \tag{5.48}$$

e dividindo (5.48) por h, obtemos as seguintes estimativas para o quociente de Newton de $\ln x$:

$$\frac{1}{x+h} \le \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \le \frac{1}{x}. \tag{5.49}$$

Fazendo $h \to 0$ em (5.49) e usando a propriedade do confronto, obtemos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x},$$

isto é:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\big(\ln x\big) = \frac{1}{x}, \quad x > 0.} \tag{5.50}$$

Para chegarmos a uma regra de derivação mais geral, combinamos (5.50) com a Regra da Cadeia e obtemos:

$$\boxed{(\ln u)' = \frac{u'}{u},} \tag{5.51}$$

onde $u = u(x)$ é derivável e $u(x) > 0$, $\forall\, x$.

EXEMPLO 5.5.1 *Calcular $y'(0)$, sabendo que $y = \ln(4x^2 + 3x + 1)$.*

Solução: Usando (5.51) com $u = 4x^2 + 3x + 1$, obtemos:

$$y' = \left[\ln(4x^2 + 3x + 1)\right]' = \frac{(4x^2 + 3x + 1)'}{4x^2 + 3x + 1} = \frac{8x + 3}{4x^2 + 3x + 1}$$

e considerando $x = 0$, encontramos $y'(0) = 3$.

EXEMPLO 5.5.2 *Determine o domínio e calcule a derivada da função $y = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.*

Solução: O logaritmo está definido apenas para números positivos. Portanto, devemos ter:

$$\frac{x+1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ ou } x < -1$$

e o domínio da função é o conjunto $\mathcal{D} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. A derivada é calculada considerando $u = \dfrac{x+1}{x-1}$ em (5.51) e após as simplificações, obtemos:

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right] = \frac{u'}{u} = -\frac{2}{x^2 - 1}.$$

▶ PROPRIEDADES BÁSICAS DO LOGARITMO:

Quando estudamos as regras de derivação, estabelecemos que uma função constante tem derivada nula no seu intervalo de definição e na Unidade 6 proveremos a recíproca: "se uma função $y = f(x)$ tem derivada nula num certo intervalo, então neste intervalo a função é constate". Usaremos este fato para comprovar as seguintes propriedades do logaritmo, válidas para $a > 0$ e $b > 0$.

(1) Logarítmo do Produto: $\boxed{\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b.}$

(2) Logarítmo do Quociente: $\boxed{\ln(a/b) = \ln a - \ln b.}$

(3) Logarítmo da Potência: $\boxed{\ln(a^k) = k \cdot \ln a, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots.}$

Prova:

(1) A função $f(x) = \ln(ax) - \ln x, \;\; x > 0$, tem derivada $f'(x) = \dfrac{a}{ax} - \dfrac{1}{x} = 0$ e, portanto, $f(x)$ é constante, isto é, $f(x) = C, \; \forall\, x > 0$. Considerando $x = 1$, encontramos $C = \ln a$ e, assim:

$$\ln(ax) = \ln a + \ln x \tag{5.52}$$

e para concluir, basta fazer $x = b$ em (5.52).

Esta propriedade admite a generalização: se $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$, são números reais positivos, então:

$$\boxed{\ln(a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_k) = \ln a_1 + \ln a_2 + \ln a_3 + \cdots + \ln a_k.} \tag{5.53}$$

(2) Inicialmente, observamos que a propriedade do produto nos dá $\ln(1/b) = -\ln b$, tendo em vista que:

$$0 = \ln 1 = \ln\big[b \cdot (1/b)\big] = \ln b + \ln(1/b).$$

Por outro lado:

$$\ln(a/b) = \ln\big[a \cdot (1/b)\big] = \ln a + \ln(1/b) = lna - lnb$$

(3) A demonstração é feita por etapas.

(i) Se $k = 0$, então: $\ln(a^0) = \ln 1 = 0 = 0 \cdot \ln a$.

(ii) Se k é qualquer inteiro positivo, então:

$$\ln(a^k) = \ln(\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{k \text{ vezes}}) = \underbrace{\ln a + \ln a + \ln a + \cdots + \ln a}_{k \text{ vezes}} = k \ln a.$$

(iii) Por fim, temos que $\ln\left(a^{-1}\right) = -\ln a$ e, portanto:

$$\ln(a^{-k}) = \ln(\underbrace{a^{-1} \times a^{-1} \times a^{-1} \times \cdots \times a^{-1}}_{k \text{ vezes}}) = \underbrace{-\ln a - \ln a - \ln a - \cdots - \ln a}_{k \text{ vezes}} = -k \ln a.$$

EXEMPLO 5.5.3 *É preciso ter cuidado ao aplicar a propriedade da potência. Ao escrever*

$$\ln(x-a)^2 = 2\ln(x-a)$$

devemos ter em mente que esta relação é válida apenas se $x > a$. Contudo, considerando que $(x-a)^2 = |x-a|^2$ a relação $\ln(x-a)^2 = 2\ln|x-a|$ é válida em qualquer $x \neq a$.

EXEMPLO 5.5.4 *Usando a derivada Logarítmica e as propriedades do logaritmo, vamos derivar a função* $y = \dfrac{(x^2-1)^2(x+1)^3}{(x^2+1)^2}$. *Aplicando o logaritmo, obtemos:*

$$\ln y = 2\ln(x^2-1) + 3\ln(x+1) - 2\ln(x^2+1)$$

e por derivação, em relação à variável x, *resulta:*

$$\frac{y'}{y} = \frac{4x}{x^2-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{4x}{x^2+1}.$$

Para concluir, basta observar que:

$$y' = y\left(\frac{4x}{x^2-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{4x}{x^2+1}\right) = \left[\frac{(x^2-1)^2(x+1)^3}{(x^2+1)^2}\right]\left(\frac{4x}{x^2-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{4x}{x^2+1}\right).$$

EXEMPLO 5.5.5 *Encontrar um intervalo onde a função* $y = \ln\left[\operatorname{sen}(1/x)\right]$ *é derivável e calcule* $y'(2/\pi)$.

Solução: Devemos ter $x \neq 0$ e $\operatorname{sen}(1/x) > 0$ e podemos escolher vários intervalos onde isso ocorre. Por exemplo, no intervalo $x > 1/\pi$, temos $0 < 1/x < \pi$ e, portanto, $\operatorname{sen}(1/x) > 0$. Pela Regra da Cadeia, temos:

$$y' = \frac{1}{\operatorname{sen}(1/x)} \times \cos(1/x) \times \left(-1/x^2\right) \Rightarrow y'(2/\pi) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/2)} \times \cos(\pi/2) \times \left(-\pi^2/4\right) = 0.$$

EXEMPLO 5.5.6 *A função* $y = \ln|x|$, *definida para* $x \neq 0$, *é derivável e* $y' = 1/x$, $x \neq 0$. *De fato:*

(i) *se* $x > 0$, *então* $y = \ln x$ *e, portanto,* $y' = (\ln x)' = 1/x$.

(ii) *se* $x < 0$, *então* $y = \ln(-x)$ *e pela Regra da Cadeia, temos* $y' = \left(\dfrac{1}{-x}\right)(-1) = 1/x$.

▶ **OS GRÁFICOS DAS FUNÇÕES:** $y = \ln x$, $y = \ln|x|$ **e** $y = |\ln x|$

No traçado do gráfico de uma função ressaltamos, mais uma vez, que além de pontos específicos por onde a curva passa, alguns itens, tais como: concavidade, região de crescimento da função, pontos extremos e comportamento no infinito, se for o caso, devem ser observados.

As funções $y = \ln x$ e $y = |\ln x|$ têm o mesmo domínio $\mathcal{D} = (0, +\infty)$, enquanto a função $y = \ln|x|$ está definida para qualquer $x \neq 0$, ou seja, seu domínio é $\mathcal{D} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Abaixo ilustramos os gráficos dessas funções.

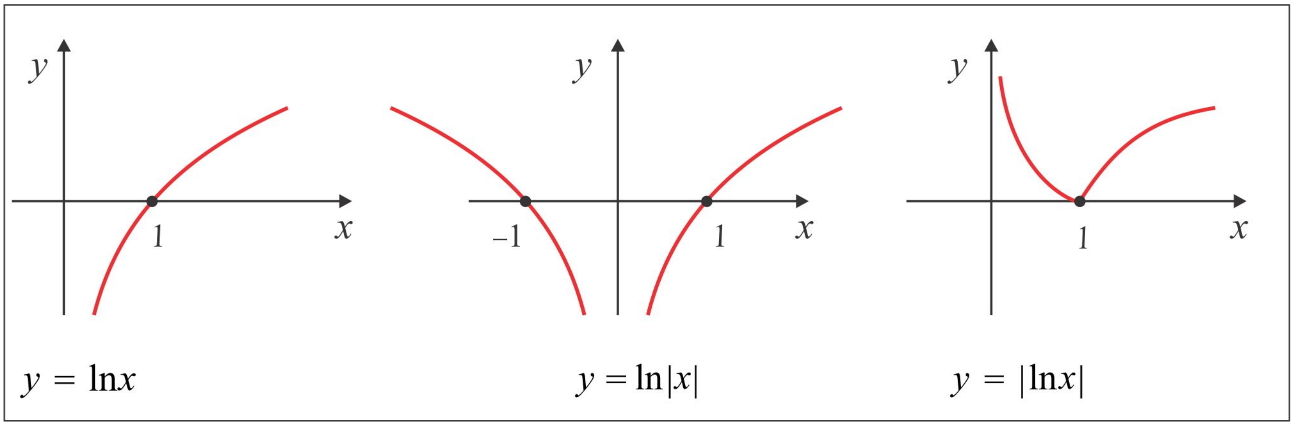


Figura 5.23: Funções Logarítmicas.

Uma leitura dos gráficos da Figura 5.23 nos remete aos limites laterais:

$$\lim_{x\to 0^+} (\ln x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} (\ln x) = \infty, \quad \lim_{x\to 0^+} (|\ln x|) = \infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty} (\ln|x|) = \infty, \quad \lim_{x\to 0^\pm} (\ln x) = -\infty.$$

▶ INVERTENDO A FUNÇÃO LOGARÍTMICA:

A função $y = \ln x$ é injetiva, com domínio $\mathcal{D} = (0, +\infty)$ e imagem $\mathcal{I} = \mathbb{R}$. Sua inversa, representada por $x = e^y$ ou $x = \exp y$ e denominada *função exponencial*, tem domínio $\mathbb{R}$ e imagem $\mathcal{I} = (0, +\infty)$ e temos a relação clássica:

$$\boxed{y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y, \quad x > 0, \ y \in \mathbb{R}.} \tag{5.54}$$

Segue diremente da definição que: $e^0 = 1$, porque $\ln 1 = 0$, e $e^y > 0, \ \forall y \in \mathbb{R}$. Além disso, temos:

(i) $\ln(e^y) = y, \ \ y \in \mathbb{R} \quad$ e $\quad \exp(\ln x) = x, \ x > 0.$

(ii) Se x e y números reais arbitrários, então $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$. De fato, considerando $a = e^x$ e $b = e^y$, temos $x = \ln a, \ y = \ln b$ e, assim:

$$x + y = \ln a + \ln b = \ln(ab) \Leftrightarrow a \cdot b = e^{x+y} \Leftrightarrow e^x \cdot e^y = e^{x+y}.$$

(iii) $e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1 \Rightarrow e^{-x} = 1/e^x.$

(iv) $\left(e^x\right)^y = e^{y\ln(e^x)} = e^{y(x\ln e)} = e^{xy}.$

▶ OS GRÁFICOS DAS FUNÇÕES: $y = e^x$ e $y = e^{-x}$.

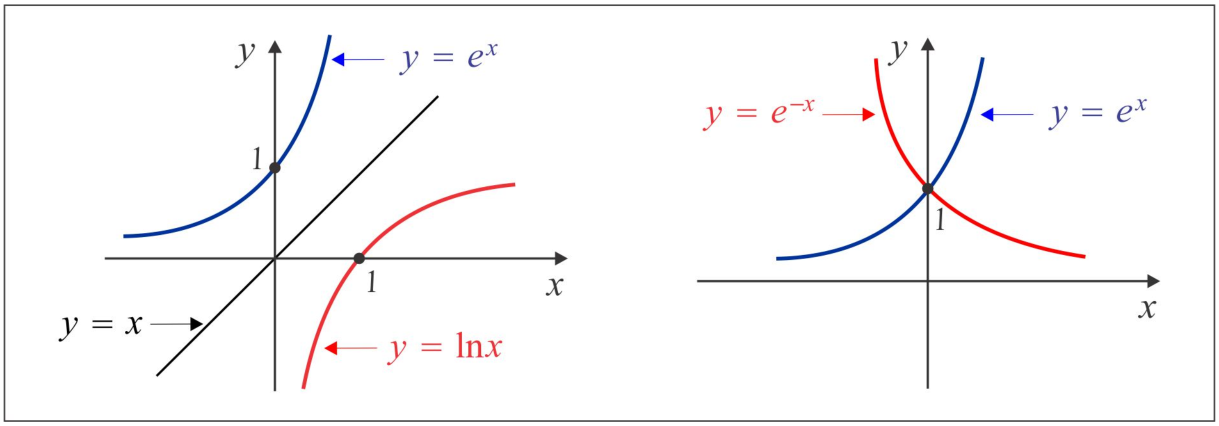


Figura 5.24: Funções Exponenciais.

Usando x como variável independente, os gráficos de e^x e $\ln x$ são simétricos em relação à reta $y = x$, por serem uma inversa da outra, enquanto os gráficos de e^x e e^{-x} são simétricos em relação ao eixo y.

A partir dos gráficos da Figura 5.24, deduzimos os seguintes limites:

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty}(e^{-x}) = 0 \quad \lim_{x\to-\infty}(e^x) = 0 \quad \lim_{x\to-\infty}(e^{-x}) = \infty.$$

► **MUDANÇA DE BASE:**

A expressão função exponencial não se aplica apenas à função $y = e^x$, de base e, mas, em geral à função $y = a^x$, com base $a > 0$. Definimos a^x a partir da exponencial e^x, pela relação:

$$\boxed{a^x = \exp(x \ln a).} \tag{5.55}$$

e de (5.55) resulta a propriedade: $\ln a^x = x \ln a$.

Fixado um número real $a > 0$, $a \neq 1$, o logaritmo de um número positivo x na base a, representado por $\log_a x$, é definido pela relação:

$$\boxed{\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y.}$$

O logaritmo $\log_a x$, na base a, goza das mesmas propriedades do logaritmo natural (na base e) e eles estão relacionados pela seguinte fórmula de mudança de base:

$$\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1.}$$

De fato:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y \Leftrightarrow \ln x = y \ln a \Leftrightarrow y = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Os gráficos de $y = a^x$, nos casos $a > 1$ e $0 < a < 1$ se assemelham, respectivamente, aos gráficos de e^x e e^{-x}. No caso $0 < a < 1$, fazemos $b = 1/a > 1$ e obtemos $a^x = b^{-x}$.

► AS DERIVADAS DAS FUNÇÕES: $y = e^x$, $y = a^x$, $y = x^r$ e $y = x^x$

(i) Derivada de e^x.

Considerando que $y = e^x$ é a inversa de $x = \ln y$, temos pela Regra da Cadeia:

$$\boxed{(e^x)' = \frac{1}{(\ln y)'} = y = e^x.} \tag{5.56}$$

A regra (5.56) traduz a frase clássica do Cálculo: "a derivada da exponencial é ela mesma". Cuidado! A frase é dirigida à função $y = e^x$. Aliás, a menos de uma constante multiplicativa, a função e^x é a única com essa propriedade, isto é, se $f'(x) = f(x)$, $\forall\, x$, então existe uma constante C, tal que $f(x) = Ce^x$. Para comprovar, basta notar que:

$$\left(\frac{f}{e^x}\right)' = \frac{f'e^x - fe^x}{e^{2x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{f}{e^x} = C \Leftrightarrow f = Ce^x.$$

Se $u = u(x)$ é uma função derivável, então combinando (5.56) e a Regra da Cadeia, temos a regra de derivação:

$$\boxed{\left(e^u\right)' = u'e^u.} \tag{5.57}$$

(ii) Derivada de a^x, $a > 0$, $a \neq 1$.

A derivada de a^x não é calculada pela Regra da Potência. Aquela regra é usada para derivar x^k, potências de x com expoente constante; aqui o expoente é a variável x. Derivando a relação $a^x = e^{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, encontramos:

$$\left(a^x\right)' = (x \ln a)'e^{x \ln a} = (\ln a)e^{x \ln a} = a^x(\ln a).$$

(iii) Derivada de x^r, $r \in \mathbb{R}$.

A regra da derivação da potência x^k foi estabelecida no caso em que o expoente k é um número inteiro positivo. Usando a exponencial, vamos generalizar a regra para a potência x^r, $x > 0$, sendo r um número real arbitrário. De fato, notando que $x^r = \exp(r \ln x)$, temos:

$$\left(x^r\right)' = \left(e^{r \ln x}\right)' = (r \ln x)'e^{r \ln x} = (r/x)x^r = rx^{r-1}.$$

(iv) Derivada de x^x, $x > 0$.

Para derivar x^x, notamos que $x^x = e^{x \ln x}$ e por derivação, obtemos:

$$\left(x^x\right)' = (x \ln x)' e^{x \ln x} = [\ln x + x(1/x)]x^x = (1 + \ln x)x^x.$$

EXEMPLO 5.5.7 *Ao derivar a função $y = e^{x^3}$, usando a regra (5.57) com $u = x^3$, obtemos*:

$$y' = (x^3)' e^{x^3} = 3x^2 \exp(x^3).$$

► **ESCREVENDO PARA APRENDER 5.5**

1. Em cada caso, encontre a expressão da derivada $\dfrac{dy}{dx}$.

   (a) $y = e^x \cos x$ (b) $y = \dfrac{1}{x} + 2 \ln x - \dfrac{\ln x}{x}$ (c) $y = (\ln x)^2 + \ln(\ln x)$

   (d) $y = \sqrt{xe^x + x}$ (e) $y = \arccos(e^x)$ (f) $y = \ln(\operatorname{sen} x)$

2. Verifique que a função $y = xe^{-x}$ é solução da equação $xy' = (1 - x)\, y$.

3. Verifique que a função $y = \dfrac{1}{1 + x + \ln x}$ é solução da equação $xy' = (y \ln x - 1)\, y$.

4. Sabendo-se que no ponto $A(0, 1)$ o gráfico da função $f(x) = \exp\left(x^2 + 2x\right)$ possui a mesma reta tangente que o de uma certa função g, determine $g'(0)$.

5. Mostre que $y = ae^{-x} + be^{-2x}$ é solução da equação $y'' + 3y' + 2y = 0$, sendo a e b constantes.

6. Se $y = f(x)$ é derivável e $f'(x) = 2xf(x)$, mostre que a função $g(x) = f(x)\, e^{-x^2}$ é constante.

7. Em cada caso, determine o domínio $\mathcal{D}(f)$ e calcule a derivada de primeira ordem $f'(x)$.

   (a) $f(x) = \ln\left(\sqrt{5 - x^2}\right)$ (b) $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$ (c) $f(x) = x \ln x - x$

   (d) $f(x) = \ln|x|$ (e) $f(x) = 1/\ln x$ (f) $f(x) = \ln(\ln x)$

   (g) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{2 - x}{3 - x}}\right)$ (h) $f(x) = \ln(\cos(3x + 5))$ (i) $f(x) = \operatorname{sen}[\ln(2x + 3)]$

8. Identifique o domínio da função $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$ e ache a reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abscissa $x=-1$. Qual a reta tangente no ponto de abscissa $x=0$?

9. Se f é definida por $f(x) = \log_b x$, para $x>0$, mostre que $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln b}$.

10. Mostre que $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^h-1}{h}\right) = 1$, identificando o limite com $\frac{d}{dx}(e^x)\Big|_{x=0}$.

11. Esboce o gráfico da função $y=\ln(1+x)$ e determine a reta normal ao gráfico, que é paralela à reta $x+2y=5$.

12. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivável e suponha que exista uma constante k tal que $f'(x) = kf(x)$, $\forall x$. Derive o quociente f/e^{kx} e deduza que existe uma constante C tal que $f(x) = Ce^{kx}$.

13. Sejam f e g funções deriváveis, tais que $f'(x) = g'(x)f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Imitando o Exercício 12, mostre que existe C tal que $f(x) = C\exp[g(x)]$.

14. Calcule a derivada de primeira ordem de cada uma das funções abaixo.

(a) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ (b) $f(x) = e^{x^2}$ (c) $f(x) = (e^x)^2$

(d) $f(x) = 3^{-x}$ (e) $f(x) = \sec(a^x)$, $a>0$ (f) $f(x) = x^{(x^x)}$

(g) $f(x) = x^2 3^{x\operatorname{sen} x}$ (h) $f(x) = (x^x)^x$ (i) $f(x) = 2^{x^x}$

15. *As funções trigonométricas hiperbólicas*: senh, cosh, tanh e coth, são definidas pelas expressões:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2},\qquad \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2},\qquad \tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x},\qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

Com base nessas definições, mostre que:

(a) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{senh} x}{x} = 1$ (c) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x$

(d) $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$ (e) $\dfrac{d}{dx}(\tanh x) = (\cosh x)^{-2}$ (f) $\dfrac{d}{dx}(\coth x) = -(\operatorname{senh} x)^{-2}$

5.6 Problemas de Taxa de Variação

Problema de *Taxa de Variação* ou *Taxa Relacionada* tem sua formulação no conceito de velocidade instantânea como derivada. Essa foi a interpretação de derivada segundo Newton que apresentamos na Seção 5.1. Ao resolver um problema de taxa de variação, devemos ter em mente o seguinte roteiro:

(i) Sempre que possível, esboçar um gráfico identificando as constantes e as variáveis (dependentes do tempo). A derivada com relação ao tempo é normalmente representada por um *ponto* sobre a variável; assim $\dot{x}$ e $\dot{y}$ denotam as derivadas $\dfrac{dx}{dt}$ e $\dfrac{dy}{dt}$, respectivamente. Já a derivada de segunda ordem $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ é representada por $\ddot{x}$.

(ii) Identificar o que foi dado e o que se pede no problema.

(iii) Relacionar as variáveis identificadas no problema por meio de uma ou mais equações.

(iv) Por derivação, em relação ao tempo t, calcular a taxa que o problema pede.

► ESCREVENDO PARA APRENDER 5.6

1. Uma partícula se move de modo que, no instante t, a distância percorrida é dada por

$$s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t.$$

   (a) Que expressões fornecem a velocidade e a aceleração? (resp.: $v = t^2 - 2t - 3,\ a = 2t - 2$)

   (b) Em que instante a velocidade é zero? (resp.: $t = 3$)

   (c) Em que instante a aceleração é zero? (resp.: $t = 1$)

2. Uma partícula move-se sobre a parábola $y = x^2$, com coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ deriváveis e $\dot{x} \neq 0$. Em que ponto da parábola as coordenadas deslocam-se à mesma taxa? (resp.: $P(1/2, 1/4)$)

3. Um ponto move-se ao longo da curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ e sua abscissa x varia a uma velocidade constante de 3 cm/s. Qual será a velocidade da ordenada y, quando $x = 2$ cm? (resp.: $-12/25\, cm/s$)

4. Um ponto move-se sobre a parábola $y = 3x^2 - 2x$. Supondo-se que suas coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são funções deriváveis e que $x'(t) \neq 0$, em que ponto da parábola a velocidade da ordenada y será o triplo da velocidade da abscissa x? (resp.: $P(5/6, 5/12)$)

5. Um cubo se expande de modo que sua aresta varia à razão de $12,5$ cm/s. Qual a taxa de variação de seu volume, no instante em que a aresta atingir 10 cm de comprimento? (resp.: $3750\, cm^3/s$)

6. O raio de uma esfera cresce à razão de $2,5 cm/s$. Quão rapidamente varia seu volume no instante em que o raio mede $7,5cm$? (o volume da esfera de raio r é $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$). (resp.: $562.5\,\pi\, cm^3/s$)

7. Sejam x e y os catetos de um triângulo retângulo e θ o ângulo oposto a y. Supondo-se que $x = 12$ e que θ decresce à razão de $1/30$ rad $/s$, calcule $y'(t)$, quando $\theta = \pi/3$ rad. (resp.: -1.6unid$/s$)

8. Uma escada de 8 m está encostada em uma parede vertical. Se a extremidade inferior da escada for afastada do pé da parede a uma velocidade constante de 2 m/s, com que velocidade a extremidade superior estará descendo no instante em que a inferior estiver a 3 m da parede?(resp.: $-6/\sqrt{55}\, m/s$)

9. Uma viga medindo 30 m de comprimento está apoiada em uma parede e o seu topo está se deslocando a uma velocidade de $0,5$ m/s. Qual a taxa de variação da medida do ângulo formado pela viga e pelo chão, quando a topo da viga estiver a uma altura de 18 m? (resp.: $-1/48\,\text{rad}/s$)

10. A Lei de Boyle para a dilatação dos gases é dada pela equação $PV = C$, onde P é a pressão, medida em Newtons por unidade de área, V é o volume e C é uma constante. Num certo instante, a pressão é de 3.000 N/m^2, o volume é de 5 m^3 e está crescendo à taxa de 2 $m^3/$min. Qual a taxa de variação da pressão nesse instante? (resp.: $-1200\, N/m^2$)

11. Expresse a taxa de crescimento do volume V de uma esfera, relativa à superfície S, em função do raio r da esfera. Faça o mesmo para o raio, em relação ao volume. (resp.: $\frac{dV}{dS} = r/3$ e $\frac{dr}{dV} = \frac{1}{4\pi r^2}$)

12. Um balão sobe verticalmente com uma velocidade v e um observador, a certa distância d, vê o balão sob um ângulo de elevação θ. Expresse a taxa $\dot{\theta}$ de variação de θ em termos de v, θ e d. Qual a velocidade do balão se $d = 500$ m e $\dot{\theta} = 0,02$ rad $/s$ e $\theta = \pi/4$ rad. (resp.: $\frac{v\cos^2\theta}{d}$ e $v = 20\, m/s$)

13. Uma bola de neve derrete a uma taxa volumétrica $V'(t)$ proporcional à sua área. Mostre que o seu raio r decresce a uma taxa $r'(t)$ constante.

14. Um reservatório cônico, com vértice para baixo, contém água de volume V até uma altura h. Supondo que a evaporação da água se processa a uma taxa $\dot{V}$ proporcional à sua superfície, mostre que h decresce a uma taxa $\dot{h}$ constante

15. Uma piscina está sendo esvaziada de tal forma que $V(t) = 300(20 - t)^2$ representa o número de litros de água na piscina t horas após o início da operação. Calcule a velocidade (instatânea) de escoamento da água ao cabo de 8 horas e a velocidade média desse escoamento no mesmo tempo.

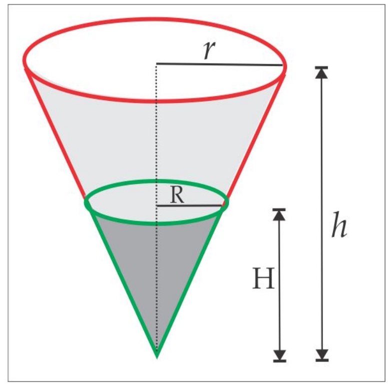
16. Uma estátua de altura h está sendo instalada sobre um pedestal de altura l acima do plano horizontal que passa pelo olho de um observador. Com o observador a uma distância x, calcule a

taxa de variação, em relação a x, do ângulo θ sob o qual o observador vê a estátua, em termos de h, l e x. Qual o valor dessa taxa se $h = 20$, $l = 5$ e $x = 50$?

17. A figura ilustra um reservatório cônico de altura $h = 10m$ e raio $r = 4m$ contendo água, que escoa a uma vazão de $5m^3/hora$.

    (a) Qual a relação entre as variáveis R e H?

    (b) A que taxa o nível da água diminui, quando $H = 6m$?



18. *Um cilindro circular reto, ao ser aquecido, tem seu diâmetro e sua altura aumentados às taxas de* 2 *cm/s e* 5 *cm/s, respectivamente. Determine a taxa de variação de seu volume, no instante em que sua altura atingir* 20 *cm e seu diâmetro for de* 8 *cm.* (resp.: $240\pi\, cm^3/s$)

RESPOSTAS & SUGESTÕES

ESCREVENDO PARA A PRENDER 5.1

1. (a) $2x$ (b) $6x$ (c) $a + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (d) $4x - 3$ (e) $-1/(x+1)^2$.

2. (a) -1 (b) $f'_-(0) = -1$ e $f'_+(0)$ não existe (c) não.

3. (a) não (b) sim (c) $f'(x) = 2$, se $x > 0$ e $f'(x) = 0$, se $x < 0$.

4. (a) Não existe $f'(0)$ (b) Não existe$f'(1)$ (c) $f'(1) = 1/2$ (d) Não existe$f'(0)$.

5. Nos pontos $x = 0$ e $x = 4$ a função não é derivável.

6. $f(1) = 0$ e $f'(1) = 5$.

7. $f(0) = 0$ e $f'(x) = 5x + 3$.

8. $a = 6$ e $b = -3$.

9. $8x + y + 16 = 0$.

10. $y = 4x - 4.$

11. $y = -13/6$ e $y = 7/3.$

12. (b) sim (c) não.

13. f é contínua, mas, não derivável em $x = 1.$

14. (a) $f'(x) = -2x$, se $x < 0$ e $f'(x) = 2x$, se $x > 0$ (b) $f'(0) = 0.$

15. $y = \pm 2x - 1.$

16. De cima para baixo, a correpondência segue a seqüência 2, 4, 1 e 3.

ESCREVENDO PARA A PRENDER 5.2

1. $f'(0) = -2,$ $f''(0) = 0$ e $f^{(30)}(0) = 0.$

2. Calcule as derivadas y' e y'' e comprove a relação.

3. Antes de iniciar, veja as regras de derivação e as derivadas das funções elementares.

   (a) $-\pi/x^2$ (b) $-1/3 + 2x - 2x^3$ (c) $1/\sqrt{x}\,(1 - \sqrt{x})^2.$

4. $r_1 : y = 7/3$ e $r_2 : y = -13/6.$

5. (a) $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ e $y = -3x + 28.$

   (b) $y = \frac{1}{8} - \frac{3}{2^9}(x - 16)$ e $y = \frac{1}{8} - \frac{2^9}{3}(x - 16).$

   (c) $y = \sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(x - 3)$ e $y = \sqrt{3} - 2\sqrt{3}\,(x - 3)\,.$

6. $y \pm \frac{9}{16} = \frac{8}{9}(x \mp \frac{3}{2}).$

7. A reta tangente é $x = 2$ e a reta normal é $y = 0$ (o eixo Ox).

ESCREVENDO PARA A PRENDER 5.3

1. $\dfrac{dy}{dx} = 2x + \dfrac{2u}{(x-1)^2\sqrt{1+u^2}}.$

2. Derivação Implícita.

   (a) $y' = \dfrac{1}{3y^2 - 1}$.

   (b) $y' = \dfrac{1 - 4\sqrt{x}y}{2\sqrt{x}\,(3y^2 + 2x)}$.

   (c) $y' = \dfrac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{x+y} - \sqrt{1+y}}$.

   (d) $y' = \dfrac{4xy\sqrt{xy} - y}{x - 2x^2\sqrt{xy}}$.

3. Da Regra da Cadeia, temos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{dx}{dt} = -2xy^2 \cdot \frac{dx}{dt}.$$

4. Temos da Regra da Cadeia que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 3x^2 \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(3x^2\right) \cdot \frac{dx}{dt} + 3x^2 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \\ &\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = 6x \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 3x^2 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \end{aligned}$$

5. $2x + y + 5 = 0$ e $x - 2y - 5 = 0$.

6. Usando a Regra da Cadeia, deduza que

$$h'(x) = 3\,[f(x)]^2\, f'(x) + 3x^2 f'\left(x^3\right)$$

   e por substituição direta de x por 2, obtenha $h'(2) = -15$.

7. Considerando em (5.18) $x = 1$, encontramos $y = 1/2$ e por derivação implícita, chegamos a:

$$\frac{y'(x-y) - y(1-y')}{(x-y)^2} - \frac{y - xy'}{y^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0. \tag{5.58}$$

   Em (5.58) fazemos $x = 1$ e $y = 1/2$ e encontramos $y'(1) = 7/16$.

8. Como ilustração, veja o caso $n = 3$, em que $3! = 6$ (veja 6.16). Temos $y = (ax+b)^3$ e por derivação, obtemos:

$$y' = 3a\,(ax+b)^2, \quad y'' = 6a^2\,(ax+b) \quad \text{e} \quad y''' = 6a^3 = 3!a^3.$$

   No caso geral, temos: $y^{(n)} = n!a^n$.

9. $3x + 4y = 25 \quad \text{e} \quad 4x - 3y = 0.$

10. $y = \frac{-5}{4}x - 4 \quad \text{e} \quad y = \frac{4}{5}x + \frac{25}{4}.$

11. (a) $g(y) = \sqrt{y+4}, \quad -4 \le y.$

    (b) $g(y) = -\sqrt{y+4}, \quad -4 \le y.$

    (c) $g(y) = 1 - y^2, \quad y \le 0.$

    (d)$g(y) = \dfrac{y}{1-y}, \quad y < 1.$

    (e) $g(y) = \sqrt{\dfrac{y}{1-y}}, \quad 0 \le y < 1.$

    (f) $g(y) = -\sqrt{\dfrac{y}{1-y}}, \quad 0 \le y < 1.$

12. (a) $\left| \begin{array}{l} y = x^2 - 2x - 3, \ x \le 1 \\ x = 1 - \sqrt{y+4}, \ y \ge -4 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left| \begin{array}{l} y = x^2 - 2x - 3, \ x \ge 1 \\ x = 1 + \sqrt{y+4}, \ y \ge -4 \end{array} \right. .$

    (b) $\left| \begin{array}{l} y = -x^2 + x + 2, \ x \le 1/2 \\ x = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - y}, \ y \le \frac{9}{4} \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left| \begin{array}{l} y = -x^2 + x + 2, \ x \le 1/2 \\ x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - y}, \ y \le \frac{9}{4} \end{array} \right. .$

    (c) $\left| \begin{array}{l} y = \sqrt{1 - x^2}, \ -1 \le x \le 0 \\ x = -\sqrt{1 - y^2}, \ 0 \le y \le 1 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left| \begin{array}{l} y = \sqrt{1 - x^2}, \ -1 \le x \le 0 \\ x = \sqrt{1 - y^2}, \ 0 \le y \le 1 \end{array} \right. .$

    (d)$\left| \begin{array}{l} y = \sqrt{4 - x^2}, \ -2 \le x \le 0 \\ x = -\sqrt{4 - y^2}, \ -2 \le y \le 0 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left| \begin{array}{l} y = -\sqrt{4 - x^2}, \ 0 \le x \le 2 \\ x = \sqrt{4 - y^2}, \ -2 \le y \le 0 \end{array} \right. .$

13. Verifique diretamente que $f(g(y)) = y$ e $g(f(x)) = x$, válidas para $|y| < 1$ e pata todo x.

14. Se $g(y)$ representa a inversa de $f(x)$, então $D(g) = \{y \in \mathbb{R} : y \ne 1\}$ e $g(y) = \dfrac{y}{1-y}$. Para comprovar a fórmula

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

calcule diretamente as derivadas $g'(y)$ e $f'(x)$.

15. **(a)** $D(g) = [\frac{-9}{4}, +\infty) \quad \text{e} \quad \text{Im}(g) = [\frac{1}{2}, +\infty).$ **(b)** $g'(-2) = 1.$

16. Se f é par, então $f(x) = f(-x)$ e usando a Regra da Cadeia, obtemos:

$$f'(x) = -f'(-x)$$

e daí resulta que f' é uma função ímpar.

17. Dado que $f(x) = |x+2|^3$, temos:

(a) $f'(x) = 3|x+2|(x+2)$ (b) $(-2, 0)$ (c) $(-2 \pm 1/3^{3/4}, \pm 1/81\sqrt{3})$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 5.4

1. Temos $f'(x) = 0$ e $g'(x) = 0$ e para concluir, note que $f(1) = \pi/2$ e $g(\sqrt{2}/2) = \pi/2$.

2. $x - 4y = \pi - 2$.

3. Usando limites fundamentais.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{sen}(2x)}{2x} = (\text{faça } 2x = t) = 2\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} = 2.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{3x} = \frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1/3.$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1.$

(d) 1 (e) 0 (f) 0 (g) 1 (h) 1/2 (i) 2/3.

4. (a) $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$ (b) $y' = -y/x$.

5. Reta tangente: $y = 1 + 2x$. A reta normal é: $x + 2y = 2$.

6. Reta tangente: $4y - 2x = 8 + \pi$. A reta normal é: $8x + 4y = 8 + \pi$.

7. Derivando a igualdade $xf(x) + \operatorname{sen}[f(x)] = 4$ em relação a x, encontramos

$$f(x) + xf'(x) + \cos[f(x)] \cdot f'(x) = 0$$

e daí segue o resultado.

8. Veja as regras de derivação e as derivadas das funções trigonométricas.

(a) $y' = -10\,(3 - 2\,\mathrm{sen}\,x)^4 \cos x.$

(b) $y' = 2 - 15\cos^2 x\,\mathrm{sen}\,x.$

(c) $y' = x\,\mathrm{arctg}\,x.$

(d) Note que $y = \mathrm{cotg}^2\,x$ e, portanto, $y' = -2\,\mathrm{cotg}\,x\,\mathrm{cosec}^2\,x.$

(e) $y' = 3\cos(3x) - \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}\,(x/5) + \dfrac{1}{2\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x})}.$

(f) $y' = \dfrac{1}{1+x^2}.$

(g) $y' = \dfrac{3\cos x + 2\,\mathrm{sen}\,x}{2\sqrt{15\,\mathrm{sen}\,x - 10\cos x}}.$

(h) $y' = \mathrm{arcsen}\,x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

(i) $y' = \sec(x = 1) + x\sec(x+1)\,\mathrm{tg}\,(x+1).$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 5.5

1. (a) $e^x(\cos x - \mathrm{sen}\,x)$ (b) $\dfrac{2x + \ln x - 2}{x^2}$ (c) $\dfrac{1 + 2(\ln x)^2}{x\ln x}$ (d) $\dfrac{1 + (x+1)e^x}{2\sqrt{x + xe^x}}$ (e) $\dfrac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

   (f) $\mathrm{cotg}\,x.$

2. Temos:

$$y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)\,e^{-x} \Rightarrow xy' = (1-x)\,xe^{-x} = (1-x)\,y.$$

3. Por derivação, obtemos:

$$y' = \frac{-1 - 1/x}{(1 + x + \ln x)^2} \Rightarrow xy' = -\frac{1+x}{(1 + x + \ln x)^2}.$$

   Por outro lado:

$$(y\ln x - 1)\,y = y^2\ln x - y = \frac{\ln x}{(1 + x + \ln x)^2} - y = \frac{-1 - x}{(1 + x + \ln x)^2}.$$

4. Temos que $f'(x) = (2x+2)\,e^{x^2+2x}$ e, portanto, $g'(0) = f'(0) = 2.$

5. Sendo $y = ae^{-x} + be^{-2x}$, então:

$$y' = -ae^{-x} - 2be^{-2x} \quad \text{e} \quad y'' = ae^{-x} + 4be^{-2x}$$

   e um cálculo direto nos dá: $y'' + 3y' + 2y = 0.$

6. É suficiente mostrar que $g'(x) = 0$. Temos

$$g'(x) = f'(x)\, e^{-x^2} - 2xf(x)\, e^{-x^2} = 0$$

7. Calculando derivadas.

   (a) $\mathcal{D}(f) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ e $f'(x) = -\dfrac{x}{5-x^2}$.

   (b) $\mathcal{D}(f) = (2k\pi, (2k+1)\pi)$ e $f'(x) = \operatorname{cotg} x$.

   (c) $\mathcal{D}(f) = (0, +\infty)$ e $f'(x) = \ln x$.

   (d) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ e $f'(x) = 1/x$.

   (e) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ e $f'(x) = -\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$.

   (f) $\mathcal{D}(f) = (1, +\infty)$ e $f'(x) = -\dfrac{1}{x \ln x}$.

   (g) $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ e $f'(x) = -\dfrac{1}{2(2-x)(3-x)}$.

   (h) $\mathcal{D}(f) = (-\frac{1}{3}(2k\pi + \frac{\pi}{2} + 5), \frac{1}{3}(2k\pi + \frac{\pi}{2} - 5))$ e $f'(x) = -3\operatorname{tg}(3x+5)$.

   (i) $\mathcal{D}(f) = (-\frac{3}{2}, +\infty)$ e $f'(x) = \dfrac{2}{2x+3}\cos[\ln(2x+3)]$.

8. O domínio da função é $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. No ponto $A(-1, \ln 2)$ a reta tangente é $y = -x + \ln 2 + 1$ e no ponto $B(0,0)$ a reta tangente é $y = 0$ (o eixo x).

9. Temos:

$$f(x) = \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln b}.$$

10. Se $f(x) = e^x$, então $f'(0) = f(0) = 1$ e pela definição de derivada, temos:

$$1 = f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

11. O gráfico da função $y = \ln(1+x)$, $x > -1$, corresponde ao deslocamento de uma unidade para a esquerda do gráfico de $y = \ln x$. A reta normal, paralela à reta $x + 2y = 5$, tem equação $2x + 4y = -1 - \ln 16$.

12. Pela Regra do Quociente, lembrando que $f' = kf$, temos:

$$\left(\frac{f}{e^{kx}}\right)' = \frac{f'e^{kx} - kfe^{kx}}{e^{2kx}} = 0 \Rightarrow \frac{f}{e^{kx}} = C.$$

13. Proceda como no exercício precedente, derivando o quociente $f/\exp(g)$.

14. Derivando exponenciais.

    (a) $\frac{d}{dx}\left(e^{\operatorname{sen} x}\right) = e^{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \exp(\operatorname{sen} x)$.

    (b) $2x\exp\left(x^2\right)$.

    (c) $2\exp(2x)$.

    (d) $-3^{-x}\ln 3$.

    (e) $a^x \ln a \sec(a^x)\operatorname{tg}(a^x)$.

    (f) $x^{(x^x)}[x^x \ln x\,(1+\ln x) + x^{x-1}]$.

    (g) $3^{x \operatorname{sen} x}[2x + x^2\ln 3\,(\operatorname{sen} x + x\cos x)]$.

    (h) $(x^x)^x[x + 2x\ln x]$.

    (i) $2^{x^x}[x^x(1+\ln x)]\ln 2$.

15. Como ilustração, faremos (a) e (c).

    (a) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(2e^{2x}\right)\left(2e^{-2x}\right) = 1$

    (c) $\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(e^x - e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^x\right) = \cosh x$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 5.6

1. Equação do movimento.

    (a) $v(t) = t^2 - 2t - 3;\ a(t) = 2t - 2$ (b) $t = 3$ (c) $t = 1$.

2. O ponto $P(1/2, 1/4)$.

3. $-\dfrac{12}{25}cm/s$.

4. No ponto de abscissa $x = \frac{5}{6}$.

5. $3750cm^3/s$.

6. $562,5\pi cm^3/s$.

7. $-\dfrac{8}{5}$ unid/s.

8. $-\dfrac{6}{\sqrt{55}} m/s.$

9. $-\dfrac{1}{48}$ rad $/s.$

10. $-1200 N/m^2.$

11. $\dfrac{dV}{dS} = \dfrac{r}{3}$ e $\dfrac{dr}{dV} = \dfrac{1}{4\pi r^2}.$

12. $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{v\cos^2\theta}{d}$ e $v = 20m/s.$

13. Temos que $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ e por derivação em relação a t, chegamos a

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

Considerando que $\dfrac{dV}{dt} = k\left(4\pi r^2\right)$, obtemos:

$$k\left(4\pi r^2\right) = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = k.$$

14. Temos $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ e, considerando que $r/h = C$, encontramos $V = \frac{1}{3}\pi C^2 h^3$ e daí resulta

$$\frac{dV}{dt} = \pi C^2 h^2 \frac{dh}{dt}.$$

Agora use $\dfrac{dV}{dt} = k\pi r^2, \quad k < 0$ constante, para chegar a $\dfrac{dh}{dt} = k.$

15. $\dfrac{dV}{dt} = -7200\ l/h$ e $\dfrac{\Delta V}{\Delta t} = \dfrac{V(8) - V(0)}{8 - 0} = -76808\ l/h.$

16. $\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{l}{x^2 + l^2} - \dfrac{h + l}{x^2 + (h + l)^2}$ e $\dfrac{d\theta}{dx} \simeq -\dfrac{1}{166}.$

17. Vazão em um resevatório cônico.

   (a) Por semelhança de triângulos, encontramos $5R = 2H.$

   (b) Desejamos encontrar $\dfrac{dH}{dt}$, no instante em que $H = 6$ e a vazão é $\dfrac{dV}{dt} = -5m^3/h.$ O volume do cone de raio R e altura H é dado por:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{4\pi H^3}{75} \tag{5.59}$$

e derivando (5.59) em relação ao tempo t, chegamos a:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi H^2}{25}\frac{dH}{dt}$$

e com os dados resulta: $\dfrac{dH}{dt} = -\dfrac{125}{144\pi}\ m/h.$

18. $240\pi\ cm^3/s.$

Neste Módulo apresentaremos os principais Teoremas Clássicos do Cálculo Diferencial e suas consequências. Abordaremos problemas de Maximização e Minimização, os quais são modelados a partir de valores extremos de funções reais, e questões relacionadas ao esboço do gráfico de uma função real.

6.1 Máximos & Mínimos

Para motivar os conceitos, consideremos as funções: $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$, e $g(x) = 1/x,\ 1 \leq x \leq 2$, ilustradas na Figura 6.1.

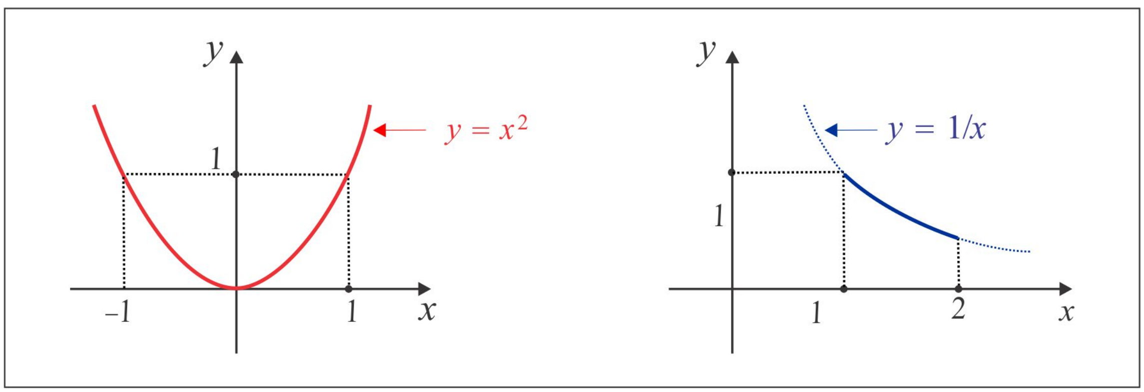


Figura 6.1: Funções $y = x^2$ e $y = 1/x$.

Vemos que $f(x) \geq 0,\ \forall\ x$, e $f(0) = 0$, de onde concluímos que no ponto $x_0 = 0$ a função f atinge seu menor valor $y_0 = 0$. Já a função g atinge seu maior valor $y_1 = 1$ no ponto $x_1 = 1$ e seu menor valor $y_2 = 1/2$, no ponto $x_2 = 2$. Observamos, ainda, que a função f não tem um valor máximo, porque $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, mas, considerando a função f restrita ao intervalo $[-1, 1]$ ela atinge seu maior valor nos ponto $x = \pm 1$; este valor máximo é $f(\pm 1) = 1$.

DEFINIÇÃO 6.1.1 *Seja $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ uma função real. Um ponto x_0 do domínio $\mathcal{D}$ diz-se um ponto de* *máximo global ou máximo absoluto da função f se*:

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in \mathcal{D}. \tag{6.1}$$

Quando ocorrer:

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in \mathcal{D}, \tag{6.2}$$

*o ponto x_0 será denominado ponto de mínimo absoluto ou mínimo global. Em qualquer dos casos o ponto x_0 é dito **extremo absoluto** da função f.*

Na Figura 6.2 ilustramos uma função $y = f(x)$ definida e contínua no intervalo fechado $I = [a, b]$ onde vemos que $x = b$ é o ponto de máximo absoluto e $x = x_1$ é o ponto de mínimo absoluto de f. Nos chama a atenção o fato que próximo do ponto x_4 a função f atinge seu menor valor precisamente no ponto x_4 e nas proximidades do ponto x_2 o valor máximo da função é $f(x_2)$. Estes fatos motivam os conceitos de *extremos locais*.

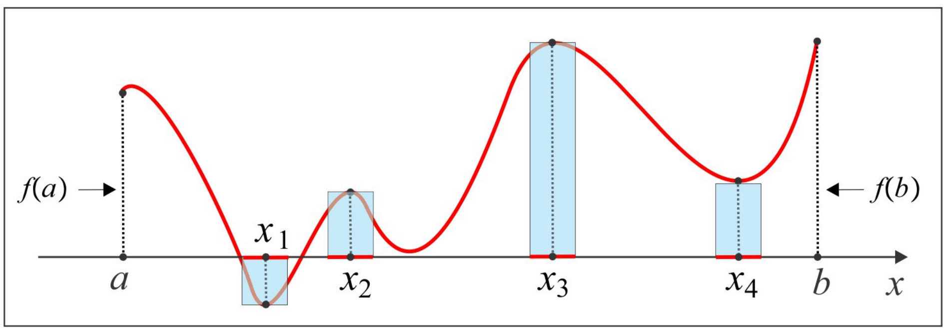


Figura 6.2: Pontos Extremos.

DEFINIÇÃO 6.1.2 *Um ponto x_0 do domínio de uma função $y = f(x)$ denomina-se ponto de máximo local ou relativo de f quando existir um intervalo aberto I contendo x_0, tal que $f(x_0)$ é o maior valor assumido pela função f no intervalo I. Em símbolos, temos*:

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall\, x \in I. \tag{6.3}$$

Quando ocorrer:

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall\, x \in J, \tag{6.4}$$

*em algum intervalo aberto J contendo x_0, diremos que x_0 é um ponto de mínimo local ou relatvo da função f. Um ponto de máximo local ou mínimo local é dito **extremo local** de f.*

A intuição geométrica nos diz que se x_1 é um ponto de máximo local de uma função derivável $y = f(x)$, $a < x < b$, então f é crescente próximo e à esquerda de x_1 e decrescente próximo e à direita de x_1. Além disso,

$$f'(x) > 0,\ x_1 - \delta < x < x_1 \quad \text{e} \quad f'(x) < 0,\ x_1 < x < x_1 + \delta,$$

e como veremos adiante, $f'(x_1) = 0$.

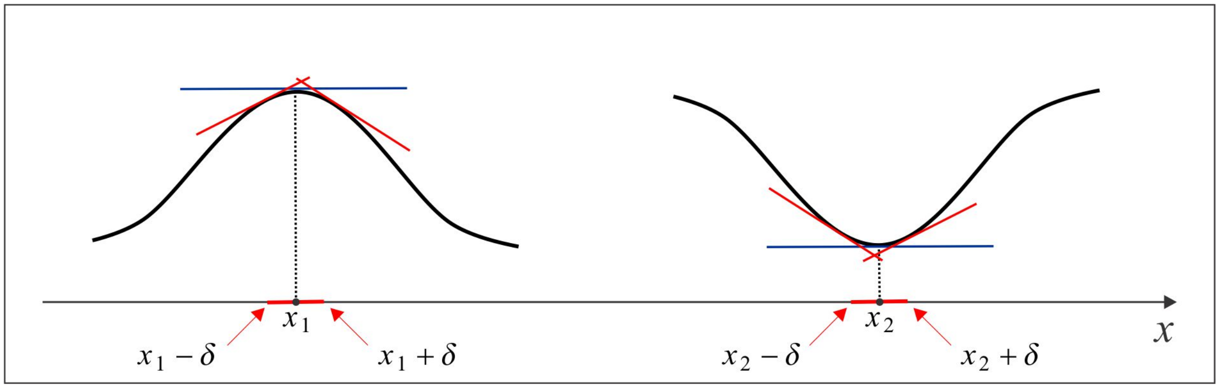


Figura 6.3: Extremos locais.

Situação semelhante ocorre nas proximidades de um ponto de mínimo local x_2, como ilustrado na Figura 6.3. Neste caso, f é crescente no intervalo $(x_2, x_2 + \delta)$ e decrescente no intervalo $(x_2 - \delta, x_2)$.

OBSERVAÇÃO 6.1.3 *Com relação aos conceitos de extremos locais e extremos absolutos, é oportuno ressaltar que*:

(i) *Para que uma função $y = f(x)$ tenha um ponto de máximo absoluto, é necessário que ela seja limitada superriormente; da mesma forma, ela não terá um ponto de mínimo absoluto, se não for limitada inferiormente. Assim, uma função $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ com limite $+\infty$, com $x \to a$ ou $x \to \pm\infty$, não tem máximo absoluto; se ela tiver limite $-\infty$, então não terá mínimo absoluto.*

(ii) *Uma função $y = f(x)$ crescente (ou decrescente) em um intervalo aberto I, não tem extremos locais nesse intervalo. De fato, se ela é crecescente no intervalo I e x_0 é qualquer ponto nesse intervalo, então à direita de x_0 a função assume valores maiores do que $f(x_0)$ e à esquerda assume valoes menores do que $f(x_0)$ e, assim, x_0 não é ponto de máximo local nem mínimo local. O fato é que ao passar por um extremo local a função muda a natureza*: *se era crescente passa a decrescer e vice-versa.*

(iii) *Se x_0 é um extremo local de uma função derivável $y = f(x)$, então $f'(x_0) = 0$. Os pontos que anulam a derivada de f são denominadas **pontos críticos** ou **pontos estacionários** da função f. Nem todo ponto crítico é um extremo local, como é fácil ver no caso da função $f(x) = x^3$, que possui ponto critico em $x = 0$ e este não é extremo local de f. Na Figura 6.4 ilustramos a situação em que x_0 é um ponto de máximo local, onde vemos a reta tangente, no ponto $A(x_0, f(x_0))$, horizontal, isto é, com declividade $m = f'(x_0) = 0$.*

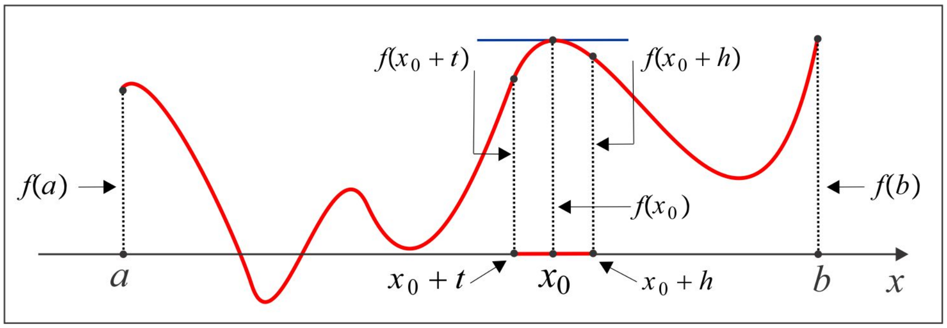


Figura 6.4: Ponto Crítico de máximo local.

Para comprovar que de fato $f'(x_0) = 0$, observamos o sinal dos quocientes:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad e \quad \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} \geq 0$$

e fazendo $h \to 0^+$ e $t \to 0^-$, encontramos:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad e \quad f'(x_0) = \lim_{t \to 0^-} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} \geq 0 \tag{6.5}$$

e de (6.5) deduzimos que $f'(x_0) = 0$. Em princípio, os limites laterais em (6.5) são as derivadas laterais $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ as quais, pela derivabilidade de f em x_0, concidem com $f'(x_0)$.

(iv) *Se o ponto de máximo ou mínimo ococrre em uma extremidade do intervalo, a derivada lateral correspondente nesse extremo não é necessariamente zero. Por exemplo, no intervalo $[-1, 1]$ a função $f(x) = x^2$ atinge seu valor máximo em $x = 1$ e, contudo, tem-se $f'_-(1) = 2$.*

(v) *Um extremo absoluto x_0 de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, interno ao intervalo $[a, b]$ é, também, um extremo local e se f for derivável em x_0, teremos $f'(x_0) = 0$.*

EXEMPLO 6.1.4 *A função $f:(0,2]\to\mathbb{R}$, definida por:*

$$f(x)=\left|\begin{array}{ll} x^3, & \text{se } 0<x<1 \\ \sqrt{x}, & \text{se } 1<x\leq 2 \\ 2, & \text{se } x=1 \end{array}\right.$$

não tem ponto de mínimo local nem absoluto e tem um ponto de máximo absoluto em $x=1$.

EXEMPLO 6.1.5 *A função $f(x)=x^3$ tem um único ponto crítico em $x=0$, o qual não é extremo local. De fato, os pontos críticos são as soluções da equação $f'(x)=0$, o que , neste caso, nos dá $3x^2=0$, ou seja, $x=0$. Como ilustra a Figura 3.11, vemos que em qualquer intervalo, contendo o ponto $x=0$ no seu interior, existem pontos onde $f>0$ e pontos onde $f<0$ e considerando que $f(0)=0$, concluímos que $x=0$ não extremo local de f.*

EXEMPLO 6.1.6 *A função $f(x)=\operatorname{sen} x$ tem uma infinidade de pontos críticos; precisamente os pontos $x=k\pi+\pi/2,\ k\in\mathbb{Z}$, que anulam a derivada $f'(x)=\cos x$.*

EXEMPLO 6.1.7 *Os pontos críticos da função $f(x)=x^3-6x$ são as soluções da equação $f'(x)=0$, ou seja, as soluções da equação $3x^2-6=0$. Temos:*

$$3x^2-6=0\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}.$$

EXEMPLO 6.1.8 *A função $f(x)=\ln x,\ x>0$, não tem ponto de máximo ou de mínimo, tendo em vista que $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$. O mesmo ocorre com a função $g(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$, porque, neste caso, temos $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x)=+\infty$ e, embora $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x)=0$ e $e^x\geq 0$, para todo x, a equação $e^x=0$ não tem solução real.*

EXEMPLO 6.1.9 *Consideremos a função $y=f(x)=x^2-2x,\ 0\leq x\leq 3$, com gráfico ilustrado na Figura 6.5. No intervalo aberto $(0,3)$ o único ponto crítico da função é $x_0=1$ o qual é ponto de mínimo local. Os extremos absolutos da função f estão entre os extremos $a=0$ e $b=3$ do intervalo e os pontos críticos internos ao intervalo $[0,3]$, no caso $x_0=1$. Comparando os valores $f(0)=0$, $f(3)=3$ e $f(1)=-1$ vemos que o ponto crítico $x_0=1$ é, além de mínimo local, ponto de mínimo absoluto e $b=3$ é o ponto de máximo absoluto. O valor máximo de f no intervalo $[0,3]$ é $f(3)=3$.*

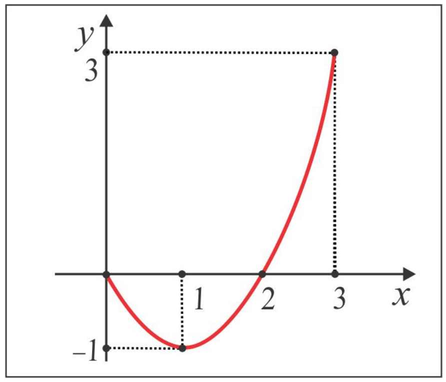


Figura 6.5: Extremos Absolutos de $y = x^2 - 2x$.

6.1.1 Máximos & Mínimos de Funções Contínuas

A função contínua do Exemplo 6.1.9 não teria ponto de máximo absoluto se o domínio fosse o intervalo aberto $I = (0, 3)$. O fato do domínio ser o intervalo fechado $[0, 3]$ foi determinante para a existência de máximo absoluto. Para referências futuras, enunciaremos uma versão simples do resultado clássico sobre a existência de extremos absolutos para funções contínuas, devido a Weierstrass.

TEOREMA 6.1.10 (de Weierstrass) *Toda função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida e contínua no intervalo $[a, b]$ tem ao menos um ponto de máximo e um ponto de mínimo absolutos nesse intervalo. Em outras palavras, toda função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada e atinge seus valores extremos.* ■

Uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, derivável no intervalo aberto (a, b), possui máximo e mínimo absolutos, os quais ocorrem dentre os pontos críticos de f no intervalo (a, b) e as extremidades a e b.

EXEMPLO 6.1.11 *Achar os valores máximo e mínimo de* $\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$, *no ntervalo* $-1 \leq x \leq 3$.

Solução: A função $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$ é contínua no intervalo fechado $[-1, 2]$ e derivável no intervalo aberto $(-1, 2)$. Os pontos críticos da função f são as soluções da equação $f'(x) = 0$, isto é:

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 2.$$

Os valores extremos de f é determinado comparando-se os valores assumidos por f nas extremidades do intervalo ($a = -1$ e $b = 3$) e nos pontos críticos internos ao intervalo $[a, b]$. Temos:

$$f(-1) = 9/4, \quad f(3) = 9/4, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1/4 \quad \text{e} \quad f(2) = 0$$

e assim, o valor máximo de f é $9/4$ e ocorre nos pontos $a = -1$ e $b = 3$; o valor mínimo de f é 0 e ocorre nos pontos $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.

► **ESCREVENDO PARA APRENDER 6.1**

1. Considere a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

   (a) Decida sobre a existência de máximos ou mínimos locais e absolutos de f.

   (b) Calcule os valores máximo e mínimo de f no intervalo $[-2, 3]$ e determine os pontos nos quais esses valores são assumidos.

2. Considere a função $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$.

   (a) Decida sobre a existência de máximos ou mínimos locais e absolutos de f.

   (b) Calcule os valores máximo e mínimo de f no intervalo $[0, 3]$ e determine os pontos nos quais esses valores são assumidos.

   (c) Repita o ítem (b), considerando o intervalo $[1/2, 3]$.

   (d) Repita o ítem (b), considerando o intervalo $[1/2, 5/2]$.

   (e) Repita o ítem (b), considerando o intervalo $[3/4, 9/4]$.

3. Analise cada uma das funções definidas abaixo com relação à existência de máximos ou mínimos locais e absolutos.

   (a) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad x \in [0, 2\pi]$

   (b) $f(x) = xe^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$

   (c) $f(x) = 3\cos(2x), \quad x \in [0, \pi]$

   (d) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1]$

   (e) $f(x) = x^2 + 1/x, \quad x \neq 0$

   (f) $f(x) = x^2\sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1]$

4. A função $f(x) = 2 - |1 - x|$, definida para $0 \leq x \leq 2$, admite algum ponto de máximo ou de mínimo?

5. Determine, se existirem, os pontos de mínimo e de máximo da função $y = 2xe^{2x}$.

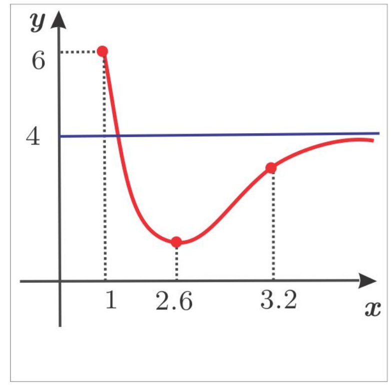
6. Na figura abaixo ilustramos uma função real $y = f(x)$, suposta derivável no intervalo $[1, 4)$.

(a) Em que intervalo f é crescente?

(b) Em que intervalo f é decrescente?

(c) Essa função possui pontos de máximo ou de mínimo? E ponto de inflexão ela possui?

(d) O que representa, no gráfico, a reta $y = 4$?



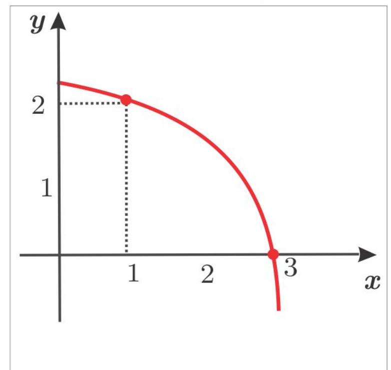
7. Suponha que a figura abaixo corresponda ao gráfico da derivada $f'(x)$ de certa função $y = f(x)$.

(a) Qual a inclinação da tangente ao gráfico de f em $x = 1$?

(b) Com relação ao crescimento, descreva o gráfico de f no intervalo $[1, 2]$.

(c) O gráfico de f possui alguma tangente horizontal?

(d) A função f possui ponto de máximo ou de mínimo local?



8. Existe algum valor para m, de modo que a função $f(x) = mx - m^2 \ln(1 + x^2)$ tenha $x = 2$ como ponto de mínimo local?

9. Se $a^2 < 3b$, deduza que a função $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ não possui extremo local nem absoluto.

10. A função $f(x) = \sqrt{|x|}, -1 \leq x \leq 2$, tem algum ponto crítico? Determine o valor máximo e o valor mínimo de f no intervalo $[-1, 2]$.

6.2 O Teorema do Valor Médio & Aplicações

Inicialmente vamos a ilustração gráfica do Teorema de Rolle e o Teorema do valor Médio, de importância fundamental no cálculo, e consequências relevantes. A Figura 6.6, que traduz o Teorema de Rolle, ilustra uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, derivável em (a, b), com $f(a) = f(b)$, e reta tangente r no ponto $P(c, f(c))$ horizontal. Já a Figura 6.7 ilustra uma função contínua $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, derivável em (a, b), onde a reta tangente s no ponto $Q(c, f(c))$ é paralela à reta que passa nos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$.

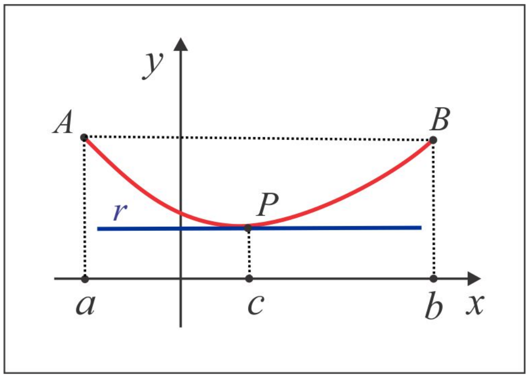


Figura 6.6: Teorema de Rolle

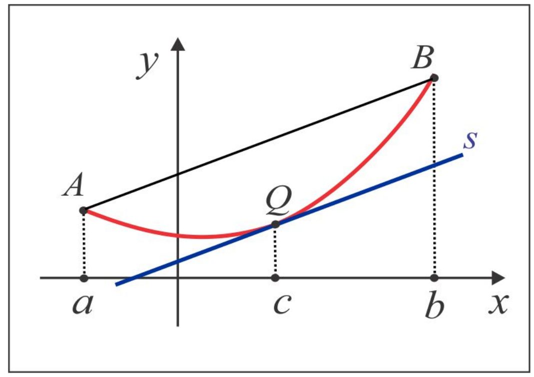


Figura 6.7: Teorema do Valor Médio

TEOREMA 6.2.1 (Teorema de Rolle) *Seja $y = f(x)$ uma função definida e contínua no intervalo fechado $[a, b]$, com $f(a) = f(b)$, e suponhamos que f seja derivável em todos os pontos do intervalo aberto (a, b). Então, existe ao menos um ponto c entre entre a e b, tal que $f'(c) = 0$. No ponto $P(c, f(c))$ a reta tangente é horizontal.*

DEMONSTRAÇÃO No caso em que a função f é constante em $[a, b]$, então $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ e nada nos resta a demonstrar. Suponhamos que a função f não seja constante, de modo que ela assume valores menores ou maiores do que $f(a) = f(b)$, e o ponto c onde ela assume valor máximo ou valor mínimo é interno ao intervalo $[a, b]$ e, portanto, um extremo local. Assim, $f'(c) = 0$. ■

TEOREMA 6.2.2 (Teorema do Valor Médio - TVM) *Seja $y = f(x)$ uma função definida e contínua no intervalo fechado $[a, b]$, e suponhamos que f seja derivável em todos os pontos do intervalo aberto (a, b). Então, existe ao menos um ponto c entre a e b, tal que:*

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.} \tag{6.6}$$

No ponto $Q(c, f(c))$ a reta tangente é paralela à reta que passa nos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$.

DEMONSTRAÇÃO Para reduzir o TVM ao Teorema de Rolle, vamos construir a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ como diferença entre a curva $\gamma : y = f(x)$ e a reta s que passa nos pontos A e B, isto é:

$$F(x) = y_\gamma - y_s = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{6.7}$$

A função $y = F(x)$ atende às condições do Teorema de Rolle, com $F(a) = F(b) = 0$ e, portanto, existe ao menos um ponto c entre a e b, tal que $F'(c) = 0$. Por derivação de (6.7) em relação à variável x, obtemos:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{6.8}$$

e considerando $x = c$ em (6.8), notando que $F'(c) = 0$, chegamos a (6.6). Na Figura 6.8 ilustramos graficamente a demonstração do TVM. ■

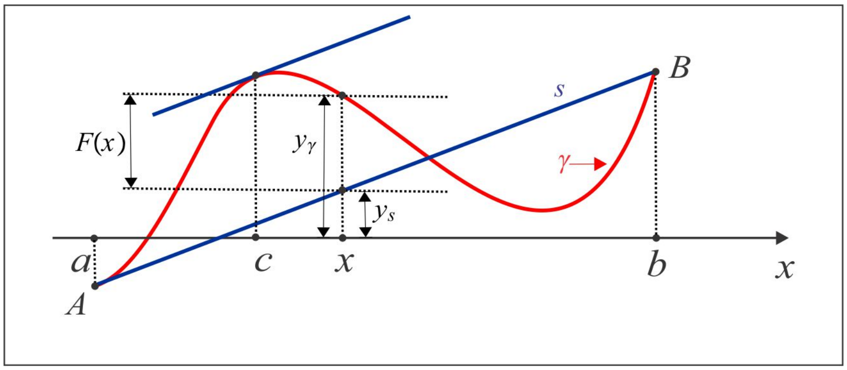


Figura 6.8: Prova ilustrada do TVM.

EXEMPLO 6.2.3 *A função $f(x) = |x|$ é contínua no intervalo $[-1, 1]$, com derivada $f'(x) = 1$, para $x > 0$ e $f'(x) = -1$, para $x < 0$. Notamos que $f(1) = f(-1)$, e, contudo, não existe um ponto c entre -1 e 1, tal que $f'(c) = 0$. Isto não contradiz o Teorema de Rolle, por que a condição de ser f derivável em todos os ponto do intervalo $(-1, 1)$ não é atendida, já que f não derivável em $x = 0$.*

EXEMPLO 6.2.4 *Considere as funções $f(x) = x^3 - x$ e $g(x) = x^2 + 1$, ambas definidas no intervalo $-1 \le x \le 1$. Encontre um c do Teorema de Rolle para a função f e outro do Teorema do Valor Médio para a função g.*

SOLUÇÃO Fazer

6.2.1 Consequências do TVM

► **FUNÇÃO COM DERIVADA NULA**

Quando estudamos Regras de Derivação, estabelecemos que as funções constantes $f(x) = k,\ a < x < b$, têm derivada zero. O quê dizer das funções com derivada nula? Se uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tem derivada nula em todos os pontos do intervalo (a, b), então ela é constante.

Prova Sejam x_1 e x_2 dois pontos arbitrários em $[a, b]$, com $x_1 < x_2$, e mostremos que $f(x_1) = f(x_2)$. De fato, aplicando o TVM à função f no intervalo $[x_1, x_2]$, achamos um ponto c entre x_1 e x_2, tal que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0$$

e daí resulta $f(x_1) = f(x_2)$. Como x_1 e x_2 são pontos arbitrários em $[a, b]$, segue que f é constante.

▶ FUNÇÕES COM MESMA DERIVADA

Se duas funções f e g têm a mesma derivada em um intervalo $[a, b]$, elas diferem por uma constante, isto é, existe uma costante C, tal que:

$$f(x) = g(x) + C, \quad a \le x \le b. \tag{6.9}$$

Prova A função $F(x) = f(x) - g(x)$ tem derivada nula $F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0,\ \ \forall\, x$, e, portanto, F é constante em $[a, b]$, digamos $F(x) = C$. Daí resulta (6.9).

▶ INTERVALO DE CRESCIMENTO

O TVM nos permite associar o intervalo de crescimento ou decrescimento de uma função derivável ao sinal da derivada. Mais precisamente, dada $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b), temos:

(i) Se $f'(x) > 0$ em todo ponto x em (a, b), então a função f é crescente no intervalo (a, b).

(ii) Se $f'(x) < 0$ em todo ponto x em (a, b), então a função f é decrescente no intervalo (a, b).

Prova As comprovações de (i) e (ii) são inteiramente semelhantes e faremos apenas a parte (i). Suponhamos então que $f'(x)$ seja positiva em (a, b) e fixemos dois pontos x_1 e x_2 nesse intervalo, com $x_1 < x_2$. De (6.6) segue que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0, \tag{6.10}$$

para algum c entre x_1 e x_2 e a partir de (6.10) concluímos que $f(x_1) < f(x_2)$, caracterizando o crescimento da função f em (a, b).

EXEMPLO 6.2.5 *Estudar o crescimento e o decrescimento da função* $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$.

Solução: Temos que $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ e o sinal da derivada depende dos fatores $3x$ e $x - 2$, como ilustra a Figura 6.9.

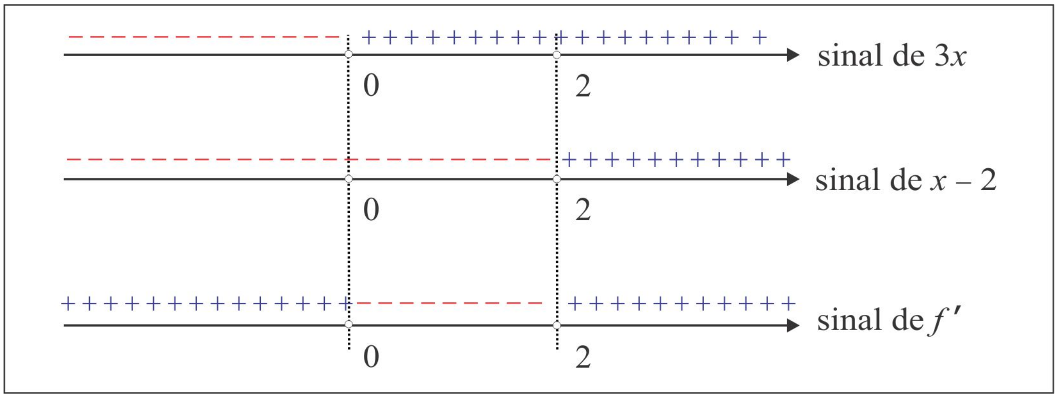


Figura 6.9: O sinal da derivada.

A função f é decrescente no intervalo $(0, 2)$, onde $f' < 0$, e é crescente em $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, onde a derivada é positiva.

EXEMPLO 6.2.6 *No intervalo* $0 < x < \pi/2$, *tem-se* $\operatorname{sen} x < x$. *Com efeito, se* $f(x) = \operatorname{sen} x - x$, *então no intervalo* $(0, \pi/2)$ *a derivada* $f'(x) = \cos x - 1 < 0$ *e a função* f *é decrescente. Assim*:

$$0 < x < \pi/2 \Rightarrow f(0) > f(x) \Rightarrow 0 > \operatorname{sen} x - x \Rightarrow \operatorname{sen} x < x.$$

EXEMPLO 6.2.7 *Para mostrar que* $e^x > 1 + x$, *no intervalo* $0 < x < \infty$, *notamos que nesse intervalo a função* $f(x) = e^x - 1 - x$ *tem derivada* $f'(x) = e^x - 1 > 0$, *de modo que* f *é crescente. Considerando que* $f(0) = 0$, *deduzimos que* $f(x) > 0$, $\forall\ x > 0$, *e, portanto,* $e^x - 1 - x > 0$, $x \in (0, +\infty)$.

► A NATUREZA DE UM PONTO CRÍTICO

Recordemos que um extremo local (máximo ou mínimo) de uma função derivável f é necessariamente um ponto crítico de f. Agora, vamos investigar a natureza de um ponto crítico a partir da análise do sinal da derivada. De forma intuitiva, observando a Figura 6.4 deduzimos que um ponto crítico x_0 será um ponto de máximo local de f quando f for crescente à esquerda de x_0 e decrescente à direita. Dessa forma estabelecemos o seguinte teste:

TESTE DA DERIVADA PRIMEIRA Um ponto crítico x_0 de uma função derivável $y = f(x)$ é um ponto de máximo local de f se $f'(x)$ for negativa à direita de x_0 e positiva à esquerda de x_0. Se $f'(x)$ for negativa à esquerda de x_0 e positiva à direita, então x_0 é um ponto de mínimo local de f.

Outro teste que frequentemente usamos consiste em analisar o sinal da derivada segunda f'', suposta contínua nas proximidades do ponto crítico x_0. Se $f''(x)$ for positiva em um intervalo aberto contendo x_0, nesse intervalo a função $f'(x)$ é crescente e como $f'(x_0) = 0$ segue que $f'(x_0)$ é negativa à esquerda e positiva à direita de x_0 e, portanto, x_0 é um ponto de mínimo local. Não parece óbvio, mas, a derivada segunda f'' será positiva em um intervalo aberto contendo x_0 se o for no ponto x_0. Isto decorre da permanência do sinal de uma função contínua: *se uma função contínua é positiva (resp. negativa) num ponto x_0, então ela permanece positiva (resp. negativa) em um intervalo aberto contendo x_0.*

TESTE DA DERIVADA SEGUNDA Seja $y = f(x)$ uma função duas vezes derivável, com derivada de segunda ordem f'' contínua em um intervalo aberto contendo um ponto crítico x_0 da função f. Se $f''(x_0) < 0$, então x_0 é um ponto de máximo local de f; se $f''(x_0) > 0$ o ponto crítico x_0 é um ponto de mínimo local de f.

EXEMPLO 6.2.8 *Determinar e classificar os pontos críticos da função $f(x) = xe^{-x}$.*

Solução: A equação $f'(x) = 0$ nos dá:

$$(1-x)\,e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

e a função f tem $x = 1$ como único ponto. Para classificar o ponto crítico, notamos que:

$$f'(x) > 0, \quad \text{se } x < 1, \quad \text{e} \quad f'(x) < 0, \quad \text{se } x > 1$$

e, pelo Teste da Derivada Primeira, deduzimos que $x = 1$ é um ponto de máximo local e absoluto (f é crescente em $(-\infty, 1)$ e decrescente em $(1, +\infty)$). A função não tem mínimo local, porque não tem outro ponto crítico, e não tem mínimo absoluto, porque $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

EXEMPLO 6.2.9 *Seja $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ e classifiquemos os pontos críticos de f em $\mathbb{R}$.*

Solução: A função f não possui extremos absolutos, porque $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, e os extremos locais, caso exista algum, estão entre os pontos críticos de f. Temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

A função f tem $x = 1$ como único ponto crítico e este não é de mínimo local nem de máximo local. A função é sempre crescente, porque $f'(x) = 3(x-1)^2 > 0$, $x \neq 1$, e $f'(1) = 0$. Notamos que $f(x) = (x-1)^3$ e o gráfico de f é obtido por translação do gráfico de $y = x^3$.

► A CONCAVIDADE DO GRÁFICO

Suponhamos que a função $y = f(x)$ tenha derivada segunda f'' positiva no intervalo (a, b). Isto significa que a derivada primeira f', a qual mede a declividade da reta tangente, é crescente nesse intervalo. A derivada f' ser crescente significa que o ângulo da reta tangente com o eixo Ox aumenta e a reta tangente gira no sentido antihorário, a medida que o ponto de tangência P desliza sobre o gráfico da esquerda para a direita, como ilustra a Figura 6.10. Este é o caso em que o gráfico tem a *concavidade voltada para cima*. No caso em que $f'' < 0$ no intervalo (a, b), a derivada f' é decrescente e a reta tangente gira no sentido horário quando o ponto de tangência P desliza sobre o gráfico da esquerda para a direita e o gráfico tem a *concavidade voltada para baixo*, como indica a Figura 6.11. O ponto x_0 que anula f'' denominar-se-á *ponto de inflexão e ocorre* quando f'' tiver sinais opostos à direita e à esquerda de x_0. Em um ponto de inflexão o gráfico muda de concavidade.

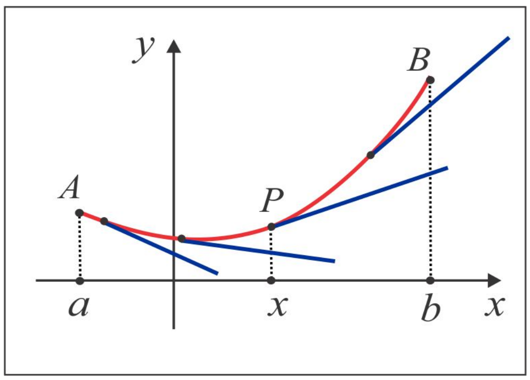


Figura 6.10: Concavidade para cima.

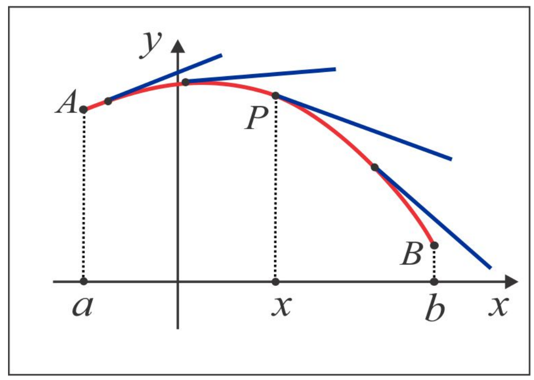


Figura 6.11: Concavidade para baixo.

EXEMPLO 6.2.10 *A função* $f(x) = x^4 - 2x^2$ *possui os seguintes pontos críticos:* $x = 0$, $x = 1$ *e* $x = -1$. *Com efeito*:

$$f'(x) = 4x\left(x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad ou \quad x = \pm 1$$

e para classificá-los notamos que $f''(x) = 12x^2 - 4$ *e, assim, temos a tabela de classificação*:

ponto crítico	$f''(x)$	*natureza*
$x = 0$	$-4 < 0$	*máximo local*
$x = 1$	$8 > 0$	*mínimo local*
$x = -1$	$8 > 0$	*mínimo local*

A derivada segunda f'' se anula nos pontos $x = \pm 1/\sqrt{3}$, onde ocorrem os pontos de inflexão, sendo $f''(x) < 0$, se $|x| < 1/\sqrt{3}$, e $f''(x) > 0$, se $|x| > 1/\sqrt{3}$; o gráfico tem a concavidade para baixo no intervalo $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ e para cima no trecho $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$. A função f não tem máximo absoluto, porque:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4 \left(1 - 2/x^2\right) = +\infty$$

e, além da origem, o gráfico toca o eixo x nos pontos $A(\sqrt{2}, 0)$ e $B(-\sqrt{2}, 0)$. Além disso, nos pontos críticos temos $f(0) = 0$, $f(\pm 1) = -1$ e os pontos $x = \pm 1$, de mínimo local, são, também, pontos de mínimo absoluto, já que:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 = \left(x^2 - 1\right)^2 - 1 \geq -1, \quad \forall\, x.$$

Na Figura 6.12 ilustramos gráficamente a função f.

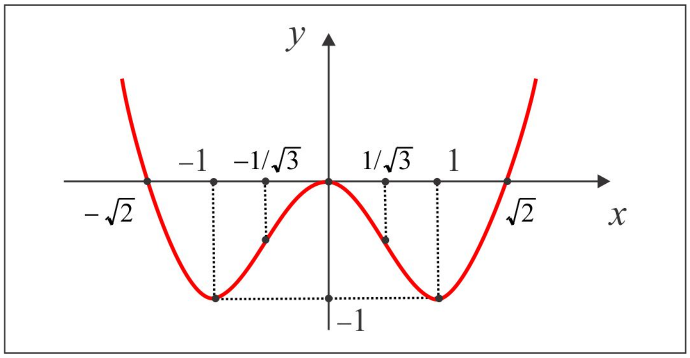


Figura 6.12: Gráfico de $f(x) = x^4 - 2x^2$.

► **ROTEIRO PARA O TRAÇADO DO GRÁFICO**

No traçado do gráfico da função $y = f(x)$, os seguintes ítens devem ser observados:

(i) Os pontos de interseção, se houver algum, do gráfico com os eixos Ox e Oy.

(ii) O comportamento do gráfico no infinito, se for o caso.

(iii) Os pontos extremos locais e/ou absolutos, se houver algum, e os valores de f nesses pontos.

(iv) Os pontos de inflexão, se houver algum, e os valores de f nesses pontos.

(v) Os intervalos de crescimento ou decrescimento.

(vi) A concavidade do gráfico.

► ESCREVENDO PARA APRENDER 6.2

1. Se $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$, encontre o número c que satisfaz a conclusão do TVM (Teorema do Valor Médio) no intervalo $[1,8]$.

2. Considere a função $f(x) = |x-1|$ no intervalo $[0,3]$ e mostre que não existe um número c nesse intervalo satisfazendo $f'(c) = \dfrac{f(3)-f(0)}{3}$. Isso contradiz o TVM?

3. Verifique que a função $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ é tal que $f(-1) = f(1)$ e, contudo, não existe um número c no intervalo $(-1,1)$, satisfazendo a $f'(c) = 0$. Isso contradiz o *Teorema de Rolle*? Por quê?

4. Prove que a equação $x^3 + x - 1 = 0$ tem exatamente uma raiz real.

5. Prove que existe um único número real x talque $e^x + x = 0$.

6. Mostre que $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \pi/2$. (*sug.*: mostre que a função $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x$ é constante e, então, calcule $f(1)$).

7. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é derivável em (a,b) e $f'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a,b)$, mostre que existe uma constante C tal que $f(x) = Ce^x$, $\forall x \in [a,b]$. (*sug.*: verifique que a função $\varphi(x) = f(x)e^{-x}$ é constante).

8. Considere $g(x) = x^4 - 4x + 1$. Encontre a função f que satisfaz $f'(x) = g'(x)$ e $f(1) = 2$.

9. Mostre que $e^x \geq 1 + x$, para $x \geq 0$. Mostre, em seguida, que $e^x \geq 1 + x + x^2/2$, com a mesma restrição $x \geq 0$. Use o processo indutivo para provar, em geral, que:
$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad \text{para} \quad x \geq 0. \tag{6.11}$$
E se $x < 0$ a desigualdade (6.11) continua válida?

10. Mostre que $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, seja qual for o $x > 0$.

11. Mostre que $\operatorname{sen} x < x$, seja qual for o $x > 0$.

12. Mostre que a equação $x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x = 0$ tem duas e somente duas raízes, uma negativa e a outra positiva.

13. Mostre que $\theta < \operatorname{tg} \theta$, para $0 < \theta < \pi/2$.

6.3 Problemas de Máximos & Mínimos

Os problemas de máximo e mínimo que serão tratados aqui podem ser resolvidos maximizando ou minimizando certas funções elementares do cálculo, que em geral dependem de várias variáveis e o primeiro passo é expressar a função em termos de uma única variável independente, eliminando as demais com os dados do problema. Os exemplos dados a seguir ilustram o processo de resolução.

EXEMPLO 6.3.1 *Determinar dois números positivos x e y cujo produto é 16 e cuja soma seja a menor possível.*

Solução: Primeiro, vejamos a resolução geométrica do problema. Ele envolve duas grandezas: (i) $s = x + y$, que deve ser mínima, e representa um feixe de retas paralelas e (ii) $xy = 16$, que representa uma hipérbole equilátera, como ilustra a Figura 6.13. À medida que o parâmetro s diminui o ponto A_1 se aproxima do ponto B_1, o ponto A_2 se aproxima do ponto B_2 e o parâmetro s será minimo quando a reta $x + y = s$ tangenciar a hipérbole $xy = 16$. O ponto de tangência $A(4, 4)$ é a solução do problema.

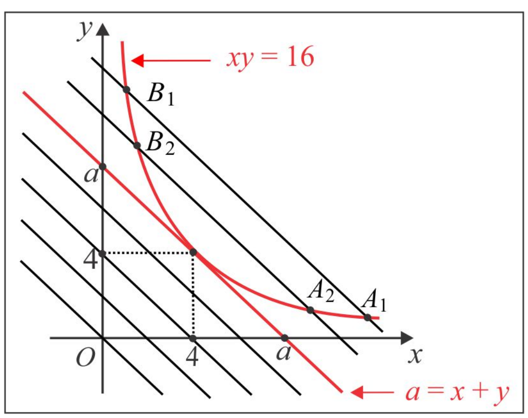


Figura 6.13: Mínimo Condicionado.

Do ponto de vista analítico, devemos minimizar a função soma: $s = x + y$, sujeita à condição $xy = 16$, $x > 0$ e $y > 0$. Eliminando o y desta condição, obtemos a função:

$$s = f(x) = x + \frac{x}{16},$$

com derivada $f'(x) = 1 - 16/x^2$, $x > 0$, e ponto crítico $x = 4$. Como $f''(4) = 1/2 > 0$, segue que o ponto crítico $x = 4$ é de fato ponto de mínimo local de f. Com $x = 4$, obtemos $y = 4$.

EXEMPLO 6.3.2 *Determinar o ponto da curva $\gamma : y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, mais próximo do ponto $A(1,0)$.*

Solução: A função que representa a distância de um ponto $P(x, \sqrt{x})$ da curva γ ao ponto $A(1,0)$ vem dada por:

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (\sqrt{x})^2} = \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

Observamos que esta função não tem valor máximo, já que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. O único ponto critico de f é a solução da equação $f'(x) = 0$, isto é:

$$\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} = 0 \Leftrightarrow x = 1/2.$$

Um cálculo direto nos dá $f''(1/2) = 1 > 0$ e o ponto crítico $x = 1/2$ é de mínimo local. O ponto da curva γ mais próximo de $A(1,0)$ é, portanto, $B(1/2, \sqrt{1/2})$. Por simplicidade, nos problemas de distância normalmente usamos a função que representa o quadrado da distância. Tendo em vista que a *função distância* e o seu quadrado têm os mesmos pontos críticos, os pontos extremos serão os mesmos. Ao usar este procedimento o valor extremo da distância vem acompanhado da raiz quadrada.

EXEMPLO 6.3.3 *Encontrar os pontos da hipérbole $\gamma : x^2 - y^2 = 1$, mais próximos do ponto $A(0,-1)$.*

Solução: O quadrado da distância $f(x,y)$, de um ponto $P(x,y)$ da hipérbole γ ao ponto $A(0,-1)$, é dado por:

$$f(x,y) = x^2 + (y+1)^2 \tag{6.12}$$

e considerando que $x^2 = 1 + y^2$ eliminamos x na equação (6.12) e obtemos a função de uma variável:

$$g(y) = 1 + y^2 + (y+1)^2 = 2y^2 + 2y + 2,$$

com ponto crítico $y = -1/2$, obtido da equação $g'(y) = 0$. Como $g'(-1/2) = 4 > 0$ segue que $y = -1/2$ é ponto de mínimo local (e absoluto) da função $g(y)$. Temos:

$$y = -1/2 \Rightarrow x^2 = 1 + (-1/2)^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}/2$$

e os ponto mais próximos são, portanto, $B\left(\pm\sqrt{5}/2, -1/2\right)$. A distância mínima é:

$$d = \sqrt{x_B^2 + (y_B + 1)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

► ESCREVENDO PARA APRENDER 6.3

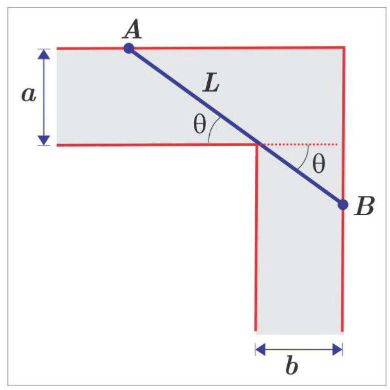
1. Determine dois números positivos x e y com produto p e cuja soma seja a menor possível.

2. Determine as dimensões de uma caixa retangular de base quadrada, sem tampa, de forma que sua área total tenha um valor prefixado A e seu volume V seja o maior possível.

3. Demonstre que o retângulo de área máxima inscrito em um círculo de raio r é um quadrado.

4. De todos os triângulos isóceles de igual perímetro, o que tem maior área é o triângulo eqüilátero.

5. A figura ilustra dois corredores, de larguras $a = \sqrt{2}$ metros e $b = 4$ metros, que se encontram num ângulo reto. Calcule, em metros, o comprimento $L = \text{dist}(A; B)$ da menor viga que passa horizontalmente de um corredor ao outro. Comece expressando L em função do ângulo θ.



6. Encontre sobre a curva $y^2 - x^2 = 1$, o ponto mais próximo do ponto $A(-1, 0)$.

7. Qual o número real positivo cuja diferença entre ele e seu quadrado resulta no maior valor possível?

8. Qual ponto da parábola $y = 1 - x^2$ está mais próximo da origem? (*sug.*: esse problema consiste em minimizar a função $f(x) = x^2 + y^2 = x^2 + \left(1 - x^2\right)^2$, que representa o quadrado da distância de um ponto da parábola à origem).

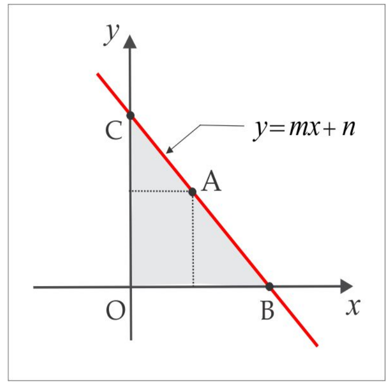
9. Qual ponto da parábola $y = x^2$ está mais próximo da reta $y = x - 2$? (*sug.*: minimize o quadrado da distância de um ponto a uma reta!).

10. Dentre todos os retângulos com o mesmo perímetro p, mostre que o quadrado é o de maior área.

11. A figura ao lado ilustra a reta de equação $y = mx + n$, $m < 0$, passando no ponto $A(3, 2)$ do primeiro quadrante.

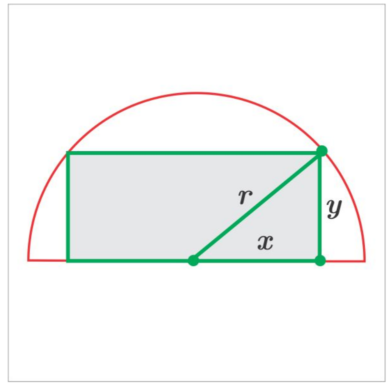
    (a) Expresse a área do triângulo OBC em função de n.

    (b) Determine m e n, de modo que a área do triângulo OBC seja a menor possível.

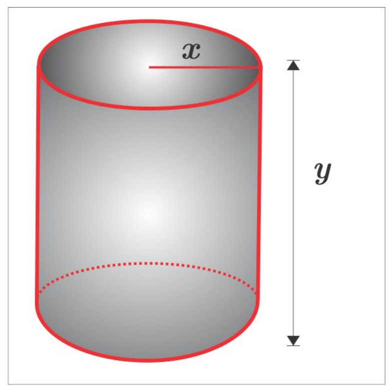


12. Encontre os comprimentos dos lados do retângulo de maior área que pode ser inscrito em um semicírculo de raio r, estando a base do retângulo sobre o diâmetro do semicírculo. (*sug.*: a função a ser maximizada é a área e esta vem dada por:

$$A = 2xy = 2x\sqrt{r^2 - x^2}.$$



13. Uma indústria de embalagens de metal onde você trabalha é escolhida para fornecer latinhas de cerveja de $500ml$ para um fabricante multinacional. O gerente da fábrica descobre que você é um funcionário que já estudou cálculo e, por essa razão, lhe procura e pergunta: as dimensões da lata (*altura* e *raio*) podem influir no custo da produção? Recorde-se que a área total A_T e o volume V do cilindro de raio x e altura y são dados por: $A_T = 2\pi x^2 + 2\pi xy$ e $V = \pi x^2 y = 500$.

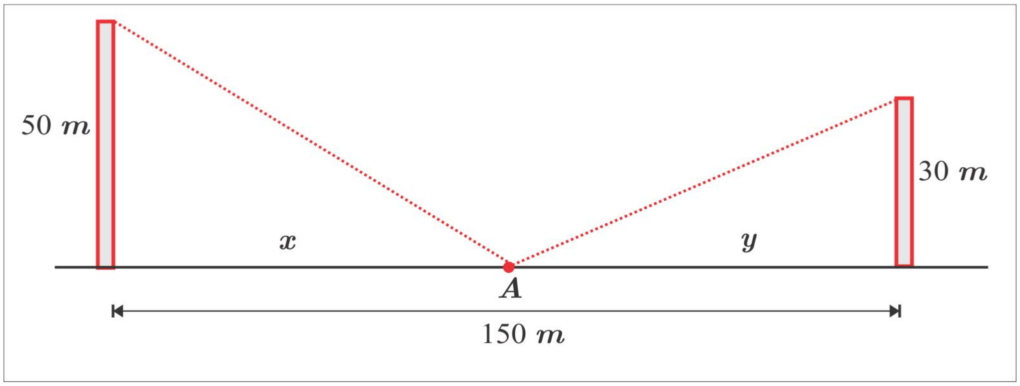


14. Uma indústria produz determinado artigo e vende-o com um lucro mensal dado pela expressão $L(q) = -q^3 + 12q^2 + 60q - 4$, onde q representa a quantidade produzida mensalmente. Qual a produção que maximiza o lucro? Qual é esse lucro máximo?

15. A figura ilustra duas torres de altura, respectivamente, 50 e 30 metros, separadas por uma distância de 150 metros e um cabo guia deve ser estendido do ponto A até o topo de cada torre.

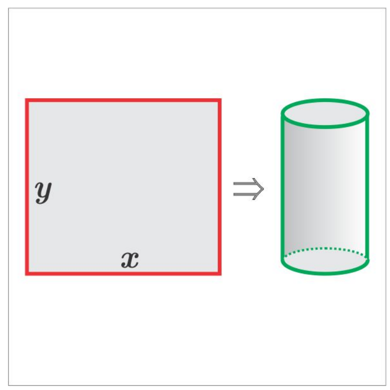
    (a) Localize exatamente o ponto A de modo que o comprimento total do cabo seja mínimo.

(b) Mostre que o comprimento do cabo usado é mínimo sempre que os ângulos em A são iguais, independente da altura das torres.



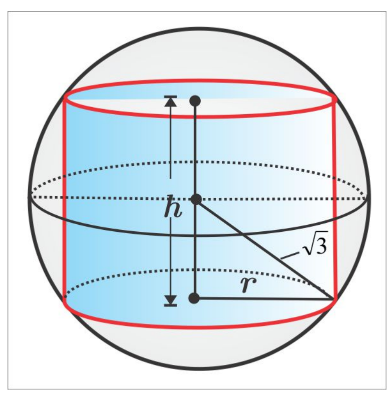
16. Uma área retangular em uma fazenda será cercada por um rio e nos outros três lados por uma cerca elétrica feita de um fio. Com $800m$ de fio à disposição, qual é a maior área que se pode cercar e quais são suas dimensões?

17. Uma folha com perímetro de $36m$ será enrolada para formar um cilindro, como é mostrado na figura ao lado. Que valores de x e y fornecem o maior volume?
A mesma folha sofrerá uma revolução em torno de seu lado y gerando um outro cilindro. Que valores de x e y fornecem, agora, o maior volume?



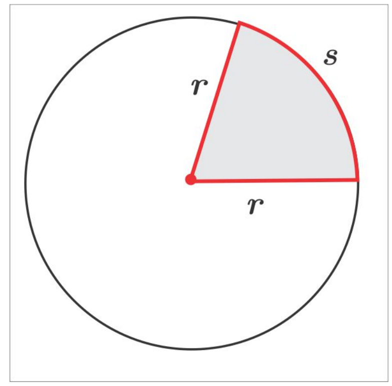
18. Determine o raio r e a altura h do maior cilindro circular reto que pode ser colocado dentro de uma esfera de raio $\sqrt{3}$, como sugere a figura ao lado. Recorde-se que o volume da esfera e do cilindro são dados, respectimaente por:

$$V_E = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{e} \quad V_C = \pi r^2 h.$$



19. Se o perímetro do setor circular apresentado na figura ao lado for fixado em $100m$, que valores de r e s darão ao setor a maior área? O perímetro e a área do setor são dados, respectivamente, por:

$$100 = 2r + s \text{ e } A = \frac{rs}{2}$$



20. A figura ilustra um canal, cuja seção transversal tem o formato de um trapézio. A base e as paredes do canal têm largura $a = 80\ cm$ e o ângulo θ, de inclinação das paredes, que produz a maior vazão é o mesmo que produz a maior área da seção transversal.

(a) Expresse a área da seção transversal em função do ângulo de inclinação θ.

(b) Determine o ângulo θ que produz a maior vazão.

6.4 A Regra de L'Hôpital

Johann Bernoulli descobriu uma regra para o cálculo de limites de frações cujos numeradores e denominadores tendem para zero. A regra é conhecida atualmente como **Regra de L'Hôpital**, em homenagem ao marquês de St. Mesme, *Guillaume de* L*'Hôpital* (1661-1704), um nobre francês que escreveu o primeiro texto elementar de cálculo diferencial, onde a regra foi impressa pela primeira vez.

▶ **FORMA INDETERMINADA I: $0/0$**

Se as funções contínuas $f(x)$ e $g(x)$ se anulam em $x = a$, então o limite:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

não pode ser calculado com a substituição de x por a, já que esta substituição produz a expressão $0/0$, sem significado algum, além de não revelar a existência e, muito menos, o valor do limite. Recorde-se dos argumentos que utilizamos na Seção 5.4.2 para mostrar que $\lim_{t\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right) = 1$, onde vemos que a substituição de x por 0 produziu a forma indeterminada $0/0$; o mesmo ocorre com o limite $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)$, que tem valor zero. Por outro lado, fomos bem sucedidos com o limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

com o qual calculamos a derivada $f'(a)$ e que sempre resulta na forma $0/0$ com a substituição $x = a$. A Regra de L'Hôpital nos permite usar derivadas para calcular limites que, abordados de outra forma, conduzem à formas indeterminadas.

TEOREMA 6.4.1 (Regra de L'Hôpital) *Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto contendo o ponto a, tais que $f(a) = g(a) = 0$, e suponhamos que $g'(x) \neq 0$ nesse intervalo exceto, possivelmente, em $x = a$. Então:*

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},} \tag{6.13}$$

desde que exista o limite do lado direito de (6.13).

Alerta! Ao aplicar a Regra de L'Hôpital não caia na armadilha de usar a derivada de f/g. O quociente a ser usado é $\frac{f'}{g'}$ e não $\left(\frac{f}{g}\right)'$.

Ilustração: *Aplicando a Regra de L'Hôpital*

A expressão $\frac{1-\cos x}{x+x^2}$ com $x = 0$ produz a indeterminação $0/0$ e aplicando a regra (6.13), encontramos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1+2x} = \frac{0}{1} = 0$$

▶ **FORMAS INDETERMINADAS II: ∞/∞, $\infty \times 0$ e $\infty - \infty$**

Uma versão da Regra de L'Hôpital também se aplica a quocientes que produzem as formas indeterminadas ∞/∞, $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$. Por exemplo, se $f(x)$ e $g(x)$ tendem ao infinito, quando $x \to a$, então a fórmula (6.13) continua válida, desde que o limite do lado direito exista. Aqui, como também na forma indeterminada $0/0$, o ponto a onde investigamos o limite pode ser finito ou $\pm\infty$.

EXEMPLO 6.4.2 *Calcular os limites*: (**a**) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{\sec x}{1+\operatorname{tg} x}\right)$ (**b**) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)$.

Solução

(**a**) Note que o numerador e o denominador sendo descontínuos em $x=\pi/2$, investigaremos os limites laterais nesse ponto. Temos:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\sec x}{1+\operatorname{tg} x}=\boxed{\frac{\infty}{\infty}}=\text{(usar L'Hôpital)}=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\sec x\operatorname{tg} x}{\sec^2 x}=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\operatorname{sen} x=1.$$

O limite lateral à direita também é 1 e, neste caso, a forma indeterminada é $\dfrac{-\infty}{-\infty}$. Logo, o limite existe e tem valor 1.

(**b**) Temos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}=\boxed{\frac{\infty}{\infty}}=\text{(usar L'Hôpital)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1/\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0.$$

EXEMPLO 6.4.3 (usando as formas $\infty\cdot 0$ e $\infty-\infty$) *Calcular os limites*:

(**a**) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)$ (**b**) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

Solução

(**a**) Temos que

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)=\boxed{\infty\times 0}=\text{(fazer } t=1/x\text{)}=\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{t}\operatorname{sen} t\right)=1.$$

(**b**) Se $x\to 0^+$, então $\operatorname{sen} x\to 0^+$ e, portanto, $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}-\dfrac{1}{x}\to\infty-\infty$. De maneira similar, se $x\to 0^-$, então $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}-\dfrac{1}{x}\to-\infty+\infty$. Nenhuma das duas formas revela o que acontece com o limite. A saída é somar as frações:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x}$$

para em seguida aplicarmos a Regra de L'Hôpital ao resultado:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x}=\boxed{\frac{0}{0}}=\text{(usar L'Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x+x\cos x}=\boxed{\frac{0}{0}}\\&=\text{(usar L'Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x-x\operatorname{sen} x}=\frac{0}{2}=0.\end{aligned}$$

▶ FORMAS INDETERMINADAS III: 1^∞, 0^0 e ∞^0

Os limites que produzem essas formas indeterminadas podem, às vezes, ser tratados utilizando-se logarítmos. De fato, da relação $f(x) = \exp\left[\ln f(x)\right]$ deduzimos que:

$$\lim_{x\to a} \ln\left[f(x)\right] = L \Rightarrow \lim_{x\to a} \exp\left[\ln f(x)\right] = \exp\left[\lim_{x\to a} \ln f(x)\right] = e^L. \tag{6.14}$$

Em (6.14) o ponto limite a pode ser finito ou $\pm\infty$.

EXEMPLO 6.4.4 *Calcular os seguintes limites*: **(a)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(x^x\right)$ **(c)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x^{1/x}\right)$.

Solução

A continuidade da função $y = \ln x,\ x > 0$, nos permite escrever:

$$\lim_{x\to a}\left[\ln\left(f(x)\right)\right] = \ln\left[\lim_{x\to\to a} f(x)\right]$$

e neste contexto, para calcular o limite de certa forma indeterminada, por exemplo, $\displaystyle\lim_{x\to a}\left[f(x)^{g(x)}\right]$, com $g(x) \to 0$ e $f(x) \to \infty$, convertemos a indeterminação ∞^0 de modo a usar a Regra de L'Hôpital. Se fizermos $L = \displaystyle\lim_{x\to a}\left[f(x)^{g(x)}\right]$ e aplicarmos o logarítmo, encontraremos:

$$\ln L = \ln\left(\lim_{x\to a}\left[f(x)^{g(x)}\right]\right) = \lim_{x\to a}\left[\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)\right] = \lim_{x\to a}\left[g(x)\ln f(x)\right] = \lim_{x\to a}\left[\frac{\ln f(x)}{1/g(x)}\right] = M$$

e a última indeterminação é do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, compatível com a Regra de L'Hôpital. O resultado do limite é, portanto, $L = e^M$.

(a) Trata-se de uma indeterminação do tipo 1^∞, a qual será convertida em $0/0$ por aplicação do logarítimo. Considerando $f(x) = (1+1/x)^x$, temos:

$$\ln\left[f(x)\right] = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1+1/x)}{1/x} \Rightarrow f(x) = \exp\left[\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}\right]$$

e, portanto:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\exp\left[\ln(f(x))\right] = \exp\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}\right)\right] = \boxed{\exp(0/0)} = \text{(usar L'Hôpital)}\\ &= \exp\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+1/x}\right)\right] = e^1 = e.\end{aligned}$$

(b) Trata-se de uma indeterminação do tipo 0^0 e procederemos como no ítem (a). Temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}(x^x) &= \boxed{0^0} = \lim_{x\to0^+}\exp\left[\ln x^x\right] = \exp\left[\lim_{x\to0^+} x\ln x\right] = \exp\left[\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x}\right] = \boxed{\exp(0/0)}\\ &= \text{(usar L'Hôpital)} = \exp\left[\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}\right] = \exp\left[\lim_{x\to0^+}(-x)\right] = e^0 = 1.\end{aligned}$$

(c) Agora, a indeterminação é do tipo ∞^0 e, mais uma vez, procedemos como no ítem (a). Temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(x^{1/x}\right) &= \boxed{\infty^0} = \lim_{x\to\infty}\exp\left[\ln x^{1/x}\right] = \exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\right] = \boxed{\exp(\infty/\infty)}\\ &= \text{(usar L'Hôpital)} = \exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}\right] = \exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right] = e^0 = 1.\end{aligned}$$

Finalizamos esta seção apresentando uma demonstração da Regra de L'Hôpital (6.13), no caso em que o ponto limite a é finito, isto é, quando a for um número real. A demonstração é na verdade uma aplicação do *Teorema do Valor Médio de Cauchy*, que é uma versão um pouco mais geral do Teorema do Valor Médio 6.2.2

TEOREMA 6.4.5 (Valor Médio de Cauchy) *Suponha que as funções f e g sejam contínuas no intervalo fechado $[a,b]$ e deriváveis no intervalo aberto (a,b) e suponha, ainda, que $g'(x)\neq 0$ em qualquer x do intervalo (a,b). Então existe um número c em (a,b) tal que:*

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.} \tag{6.15}$$

DEMONSTRAÇÃO Daremos o roteiro e deixaremos os detalhes da demonstração como parte do processo de treinamento. Não deixe de fazê-lo.

(i) Aplique o Teorema de Rolle para a função g em $[a,b]$ e deduza que $g(b)\neq g(a)$; essa condição é necessária em (6.15).

(ii) Aplique o Teorema de Rolle à função

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left[g(x)-g(a)\right]$$

para deduzir que existe um número c entre a e b, tal que $F'(c)=0$ e a partir dessa igualdade obtenha (6.15) ■

► DEMONSTRAÇÃO DA REGRA DE L'HÔPITAL

Suponhamos que x esteja à direita do ponto limite a e apliquemos o TVM de Cauchy 6.4.5 no intervalo $[a, x]$ para encontrar c entre a e x, tal que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

e, considerando que $f(a) = g(a) = 0$, obtemos:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{6.16}$$

À medida que x tende para a, o número c também se aproxima de a, porque está entre x e a, e tomando o limite em (6.16), com $x \to a^+$, obtemos:

$$\lim_{x\to a^+}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x\to a^+}\left[\frac{f'(c)}{g'(c)}\right] = \lim_{x\to a^+}\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right], \tag{6.17}$$

O caso em que x está à esquerda de a o TVM de Cauchy 6.4.5 é aplicado no intervalo $[x, a]$ e o limite em (6.17) passa a ser o limite lateral à esquerda. ■

OBSERVAÇÃO 6.4.6 (sobre as formas 0^∞ e $0^{-\infty}$) *Seriam 0^∞ e $0^{-\infty}$ formas indeterminadas? Presuma que uma função $f(x)$ é positiva em um intervalo aberto contendo a e que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.*

(a) *Se $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, então $\lim_{x\to a}\left[f(x)^{g(x)}\right] = 0$.*

(b) *Se $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, então $\lim_{x\to a}\left[f(x)^{g(x)}\right] = \infty$.*

Para comprovar (**a**) *e* (**b**), *recordemos que* $\exp(+\infty) = +\infty$ *e* $\exp(-\infty) = 0$ *e, assim, obtemos*:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)^{g(x)}\right] = \exp\left[\lim_{x\to a}\left(g(x)\ln f(x)\right)\right] = \exp\left[(\pm\infty)\cdot(-\infty)\right] = \exp(\mp\infty).$$

OBSERVAÇÃO 6.4.7 *A função $f(x) = \ln(\ln x)$ tende para o infinito, quando $x \to +\infty$, de forma mais lenta que $\ln x$. De fato, é claro $\ln(\ln x) \to \infty$, com $x \to \infty$, e a lentidão é decorrente de*:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right] = \text{(usar L'Hôpital)} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\ln x}\right] = 0.$$

OBSERVAÇÃO 6.4.8 *Por aplicação sucessiva da Regra de L'Hôpital é fácil comprovar que a função $f(x) = e^x$ cresce mais rápido do que qualquer polinômio. De fato, denotando por $n!$ (lê-se fatorial de n) o número natural $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$, temos*:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

► NOTA HISTÓRICA

L'Hospital, Guillaume François Antoine de (1661-1704). No final de 1600, Johann Bernoulli descobriu uma regra para calcular os limites das frações cujos numeradores e denominadores fossem próximos de zero. Hoje a regra é conhecida como "Regra de L´Hospital". L´Hospital (ou L'Hôpital) era um nobre francês que escreveu um texto de introdução ao cálculo no qual a regra era apresentada pela primeira vez. A regra de L′Hôpital frequentemente apresenta resultados rápidos e diretos e, algumas vezes, funciona onde outros métodos falharam. Em 1691, Johann Bernoulli concordou em aceitar um salário de 300 libras por ano de seu antigo aluno L′Hôpital para solucionar os problemas de cálculo e manter o ex-aluno atualizado sobre o assunto. Um desses problemas intitulava-se "problema 0/0", solucionado por Bernoulli. Quando L′Hôpital publicou seu livro de cálculo em 1696, a regra de "0/0" era apresentada como um teorema. Ele reconheceu sua dívida para com Bernoulli e, para não se intitular único autor, não colocou seu nome no livro. Entretanto, Bernoulli acusou L′Hôpital de plágio por publicar no livro os resultados que ele obtivera.

Principal obra: O Primeiro Livro de Cálculo - Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des linges courbes.

(fonte: Wikipédia)

► ESCREVENDO PARA APRENDER 6.4

1. Calcule os limites indicados.

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x$ (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{1/x}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$ (f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$ (g) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\ln(1-x)}{x^2-1}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{cotg} x$

(i) $\lim\limits_{y\to \pi/2}\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)\operatorname{tg} y$ (j) $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\ln(1+t)}{\log_2 t}$ (k) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x}$ (l) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\pi/2-\operatorname{arctg} x)$

2. A Regra de l'Hôpital não ajuda a encontrar os limites apresentados abaixo. Tente, você voltará sempre ao mesmo ponto. Calclule os limites de outra maneira.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}$ (b) $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-}\dfrac{\sec x}{\operatorname{tg} x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cosec} x}$

3. Qual está correto e qual está errado? Justifique suas respostas.

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-3} =$ (usar L'Hôpital) $= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{6}$ (b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-3} = \dfrac{0}{6} = 0$

4. Em cada caso, construa duas funções deriváveis f e g, com $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, que satisfaçam à condição especificada.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 3$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0.$

5. Considere as funções

$$f(x) = \left| \begin{array}{l} x+2, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad g(x) = \left| \begin{array}{l} x+1, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0. \end{array} \right.$$

(a) Mostre que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 1$, e, contudo, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 2.$

(b) Por que isso não contradiz a Regra de L'Hôpital?

6.5 Assíntotas

Suponhamos que o gráfico de certa função $y = f(x)$ não intercepta uma reta fixa r, mas a distância do gráfico à reta r torna-se arbitrariamente próxima de zero, à medida em que o ponto $P(x, f(x))$ do gráfico se afasta da origem, por exemplo. Esta é uma das situações em que a curva aproxima-se *assintóticamente* da reta r, a qual recebe o nome de *Reta Assíntota* do gráfico da função $y = f(x)$.

Há três casos a considerar:

► ASSÍNTOTA HORIZONTAL A reta $y = b$ é uma *assíntota horizontal* do gráfico de $y = f(x)$ se:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = b. \tag{6.18}$$

► ASSÍNTOTA VERTICAL A reta $x = a$ é uma *assíntota vertical* do gráfico de $y = f(x)$ se:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty. \tag{6.19}$$

Se a função $y = f(x)$ é invertível, a condição (6.19) é equivalente a:

$$\lim_{y\to\infty} f^{-1}(y) = a \qquad \text{ou} \qquad \lim_{y\to-\infty} f^{-1}(y) = a. \tag{6.20}$$

▶ **ASSÍNTOTA OBLÍQUA** A reta $y = ax + b,\ a \neq 0$, é uma *assíntota oblíqua* do gráfico de $y = f(x)$ se ocorrer:

$$\lim_{|x|\to\infty} \big| f(x) - (ax+b) \big| = 0. \tag{6.21}$$

EXEMPLO 6.5.1 *A Figura 6.14 ilustra o gráfico da função $y = x + 1/x,\ x \neq 0$, onde vemos o eixo Oy como assíntota vertical e a reta $y = x$ como uma assíntota oblíqua.*

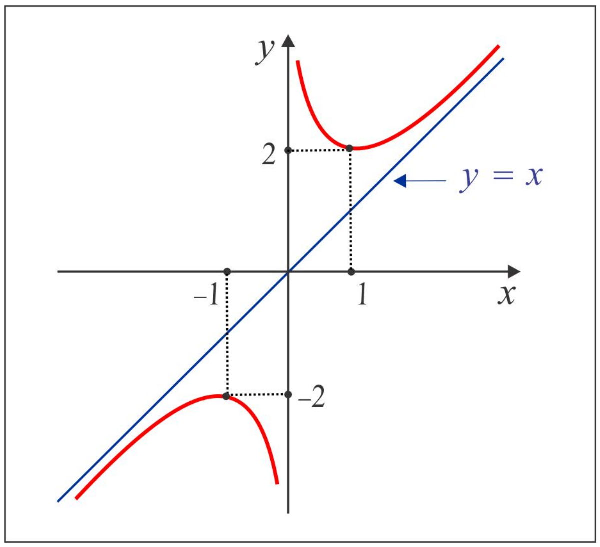


Figura 6.14: Gráfico de $f(x) = x + 1/x,\ x \neq 0$.

De fato:

(a) $\lim\limits_{|x|\to\infty} |f(x) - x| = \lim\limits_{|x|\to\infty} |1/x| = 0.$ (*isto indica que $y = x$ é uma assíntota oblíqua*)

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty.$ (*isto indica que $x = 0$ é uma assíntota vertical*)

(c) *O gráfico não toca o eixo Ox nem o eixo Oy, já que $x \neq 0$ e $y \neq 0$.*

(d) *Outras informações sobre o gráfico são obtidas a partir das derivadas*:

$$f'(x) = 1 - 1/x^2 \quad e \quad f''(x) = 2/x^3.$$

(i) *$f'(x) > 0$, se $|x| > 1$, e $f'(x) < 0$, se $|x| < 1$. Assim, f é decescente no intervalo $-1 < x < 1$ e crescente se $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Em $x = 1$ a função tem um mínimo local e em $x = -1$ um máximo local, com $f(1) = 2$ e $f(-1) = -2$.*

(ii) *$f''(x) > 0$ no intervalo $(0, +\infty)$, onde a concavidade é para cima, e $f''(x) < 0$ em $(-\infty, 0)$ e aí a concavidade é para baixo.*

► ESCREVENDO PARA APRENDER 6.5

1. Esboce o gráfico de cada uma das funções definidas abaixo, indicando, quando possível, os pontos de máximo e mínimo, os intervalos de crescimento ou decrescimento, inflexões e concavidade e assíntotas.

   (a) $f(x) = x^3 - 3x$ (b) $f(x) = x^4 - 2x^2$ (c) $f(x) = x^4 - x^3$ (d) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

   (e) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ (f) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ (g) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{x}$ (h) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-3}$

   (i) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2-9}$ (j) $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$ (k) $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$ (l) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$

   (m) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ (n) $f(x) = x - \operatorname{sen} x$ (o) $f(x) = xe^{-x}$ (p) $f(x) = e^{-x^2}$

   (q) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$ (r) $f(x) = x - \cos x$ (s) $f(x) = \cos^2 x$ (t) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$

2. Verifique que cada curva $\gamma : y = f(x)$ sugerida abaixo possui ao menos um tipo de assíntota.

   (a) $y = x + \ln x$ (b) $y = \dfrac{1}{x^2}$ (c) $y = \dfrac{x^2}{x^2-4}$ (d) $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ (e) $y = \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

   (f) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x+1}}$ (g) $y = \sqrt{x^2+1}$ (h) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ (i) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ (j) $y = x^2e^{-x}$

3. Determine a e b, de modo que $y = ax + b$ seja uma assíntota oblíqua da curva $y = \dfrac{4-x^2}{x+1}$.

4. Verifique que as retas $ay \pm bx = 0$ são assintotas da hipérbole $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

ESCREVENDO PARA A PRENDER 6.1

1. Uma maneira eficiente de comprovar que uma dada função $f(x)$ não tem máximo (resp. mínimo) absoluto é mostrar que $\lim f(x) = +\infty$ (resp. $\lim f(x) = -\infty$).

   (a) A função não tem extremos absolutos, porque $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, e os pontos $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ são, respectivamente, pontos de máximo e de mínimo locais.

   (b) $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$ são pontos de máximos absolutos, nos quais f atinge o valor 3; $x_3 = 2$ é ponto de mínimo local com $f(2) = -1$; $x_4 = -2$ é ponto de mínimo absoluto com $f(-2) = -17$.

2. Representemos por x_M e x_m os pontos de máximos absolutos e mínimos absolutos, respectivamente.

	Max Loc	Max Abs	Min Loc	Min Abs	$f(x_M)$ e $f(x_m)$
(a)	$x_1 = 1$	*não há*	$x_2 = 2$	*não há*	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$
(b)	$x_1 = 1$	$x_M = 3$	$x_2 = 2$	$x_m = 0$	$f(x_M) = 12;\ f(x_m) = 3$
(c)	$x_1 = 1$	$x_M = 3$	*não há*	$x_m = \frac{1}{2}$ e $x_m = 2$	$f(x_M) = 12;\ f(x_m) = 7$
(d)	*não há*	$x_M = 1$ e $x_M = \frac{5}{2}$	*não há*	$x_m = \frac{1}{2}$ e $x_m = 2$	$f(x_M) = 8;\ f(x_m) = 7$
(e)	$x_1 = 1$	$x_M = 1$	$x_2 = 2$	$x_m = 2$	$f(x_M) = 8;\ f(x_m) = 7$

3. Veja a tabela abaixo.

	Max Loc	Max Abs	Min Loc	Min Abs	$f(x_M)$ e $f(x_m)$
(a)	$\pi/4$	$\pi/4$	$5\pi/4$	$5\pi/4$	$f(x_M) = \sqrt{2};\ f(x_m) = -\sqrt{2}$
(b)	1	1	não há	*não há*	$f(x_M) = 1/e;\ \lim_{x\to-\infty} f = -\infty$
(c)	não há	0 e π	*não há*	$\pi/2$	$f(x_M) = 3;\ f(x_m) = -3$
(d)	*não há*	0	*não há*	± 1	$f(x_M) = 1;\ f(x_m) = 0$
(e)	*não há*	*não há*	$1/\sqrt[3]{2}$	*não há*	
(f)	*não há*	$\pm\sqrt{2/3}$	*não há*	$-1,\ 0$ e 1	

4. Mín. Abs. $x_m = 1$ e $x_m = 2$; Máx. Abs. $x_M = 1$.

5. $x = -1/2$ é ponto de mínimo local; a concavidade f é voltada para baixo no intervalo $(-\infty, -1)$ e voltada para cima em $(-1, +\infty)$.

6. Leitura do gráfico.

   (a) f decresce em $1 \le x \le 2.6$ e cresce em $x > 2.6$.

(b) Min. Abs. em $x_m = 2.6$ e Max. Abs. em $x_M = 1$.

(c) $x = 3.2$ é um ponto de inflexão.

(d) $y = 4$ é uma assíntota horizontal.

7. Leitura do gráfico.

(a) 2.

(b) Em $[1, 2]$, f' positiva e decrescente. Logo, f é crescente e seu gráfico tem concavidade para baixo.

(c) Sim, em $x = 3$.

(d) $x = 3$ é máximo local, pois $f' < 0$, para $x > 3$, e $f' > 0$, para $x < 3$.

8. $m = 0$ ou $m = 5/4$.

9. Um ponto de máximo ou mínimo de f seria um ponto crítico. Ocorre que f não tem ponto crítico!

10. Nos pontos $x \neq 0$ tem-se $f'(x) = \dfrac{x}{2|x|\sqrt{|x|}} \neq 0$ e em $x = 0$ a função f não é derivável. Logo f não tem ponto crítico. O máximo e o mínimo de f ocorrem nos pontos $x = 2$ e $x = -1$, respectivamente.

ESCREVENDO PARA A PRENDER 6.2

1. $c = 2\sqrt{2}$

2. Não há contradição, porque f não é derivável em $]0, 3[$.

3. Não há contradição, porque f não é derivável em $]-1, 1[$.

4. Estamos diante de um problema de *existência* e *unicidade*. A existência é consequência do *Teorema do Valor Intermediário* 4.1.9, tendo em vista que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(x^3 + x - 1\right) = \pm\infty.$$

Aunicidade é obtida como conseqüência do *Teorema de Rolle*, utilizando-se, para tanto, um argumento de contradição. De fato, se existissem dois valores a e b, tais que $f(a) = f(b) = 0$, existiria um número c, entre a e b, tal que $f'(c) = 0$. Ocorre que a derivada da função $f(x) = x^3 + x - 1$ não se anula em ponto algum.

5. Se $f(x) = e^x + x$, então $f(1) > 0$ e $f(-1) < 0$. A existência de uma raiz segue do TVI. Para a unicidade, use o raciocício do exercício precedente.

6. Se $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x$, então $f'(x) = 0$, de onde resulta que $f(x)$ é constante. Como $f(1) = \pi/2$, então $f(x) = \pi/2$, $\forall\ x$, e daí segue o resultado.

7. A função $\varphi(x) = f(x)\, e^{-x}$ tem derivada nula em (a, b) e, sendo assim, ela é constante, isto é, $f(x)\, e^{-x} = C$.

8. Se $f' = g'$, então $f(x) = g(x) + C$ e o valor da constante C é calculado com o dado $f(1) = 2$. A função f é, portanto, $f(x) = x^4 - 4x + 5$.

9. Inicialmente, recordamos que $e^x \geq 1$, $\forall x \geq 0$, e considerando $f(x) = e^x - x$, temos
$$f'(x) = e^x - 1 \geq 0, \quad \forall x \geq 0,$$
e, portanto, f é não decrescente em $[0, +\infty)$. Logo, se $x \geq 0$, então $f(x) \geq f(0) = 1$, isto é, $e^x - x \geq 1$. Para concluir que
$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2},$$
considere $g(x) = e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2$ e note que $g'(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$.

10. Se $x > 0$ e $f(x) = \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)$, então
$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} < 0$$
e isso indica que f é decrescente em $(0, +\infty)$. Logo,
$$x > 0 \Rightarrow f(x) < f(0) \Rightarrow \frac{x}{1+x} - \ln(1+x) < 0.$$

11. Use o raciocínio de Exercício 10, com $f(x) = \operatorname{sen} x - x$.

12. Se $f(x) = x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x$, então $f(0) = -1$ e $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, e do TVI segue que $f(x)$ tem ao menos uma raiz positiva e uma raiz negativa. Se f tivesse duas raízes positivas (resp. negativas), então pelo Teorema de Rolle a derivada se anularia em algum x positivo (resp. negativo). Ocorre que derivada $f'(x)$ é nula apenas quando $x = 0$.

13. Use o raciocínio do Exercício 10, com $f(\theta) = \theta - \operatorname{tg}\theta,\ 0 < \theta < \pi/2$, lembrando que no intervalo $0 < \theta < \pi/2$ tem-se $f'(\theta) = 1 - \sec^2\theta < 0$.

ESCREVENDO PARA A PRENDER 6.3

1. $x = \sqrt{p}$ e $y = \sqrt{p}$.

2. $b = \sqrt{A/3}$ e $h = b/2$.

3. Quadrado de lado $l = r\sqrt{2}$.

4. Se x é a base e $p = x + 2y$ é o perímetro, então a área do triângulo é $S = \frac{x}{4}\sqrt{p^2 - 2px}$, cujo ponto de máximo ocorre em $x = p/3$. Logo $x = y = p/3$ e o triângulo é equilátero.

5. Temos que $0 < \theta < \pi/2$ e, portanto:

$$\frac{dL}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \tan\theta = \left(\sqrt{2}/4\right)^{1/3}.$$

Logo,

$$\cos\theta = \sqrt{1/3} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \sqrt{2/3}$$

e substituindo na expressão de $L(\theta)$, encontramos $L = 3\sqrt{6}$ metros.

6. $(-1/2, \pm\sqrt{5}/2)$

7. $1/2$.

8. $(\pm\sqrt{2}/2, 1/2)$.

9. $(1/2, 1/4)$.

10. O problema consiste em maximizar a função área $A(x) = xy$, sendo $2x + 2y = p$.

11. Temos $y_0 = b = 4$ e $x_0 = -b/a = 6$. A equação da reta é $2x + 3y = 12$.

12. $r\sqrt{2}$ e $\dfrac{r\sqrt{2}}{2}$

13. $x = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$ e $y = \dfrac{500}{\pi x^2}$.

14. $q = 10 \quad \text{e} \quad L_{\max} = L(10)$

15. O comprimento total do cabo é:

$$L = \sqrt{2500 + x^2} + \sqrt{900 + y^2},$$

e por derivação implícita, encontramos:

$$\frac{dL}{dx} = 0 \Leftrightarrow 3x - 5y = 0.$$

Ao comparar as equações $x + y = 150$ e $3x - 5y = 0$, obtemos $x = 93.75 \quad \text{e} \quad y = 56.25$.

16. $x = 200 \quad \text{e} \quad y = 400$.

17. As dimensões da folha são $x = 12$ e $y = 6$. Já o cilindro tem altura $h = 6$ e $r = 6/\pi$.

18. $h = 2$ e $r = \sqrt{2}$.

19. $r = 25$ e $s = 50$.

20. $\theta = \pi/3$ rad ou $\theta = 60^0$.

ESCREVENDO PARA A PRENDER 6.4

1. Após a indeterminação especificada no box, aplicamos a Regra de L'Hôpital.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \boxed{\tfrac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = 1.$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/\sqrt{x}} = \boxed{-\tfrac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/2x^{3/2}} = -\lim_{x\to 0^+} (2\sqrt{x}) = 0.$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}\right) = \boxed{\exp\left(\tfrac{\infty}{\infty}\right)} = \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right) = 1.$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \exp\left[\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}\right] = \boxed{\exp\left(\tfrac{0}{0}\right)} = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x}\right) = \mathrm{e} \approx 2.71.$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \exp\left[\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right)}{1/x}\right] = \boxed{\exp\left(\tfrac{0}{0}\right)} = \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{-x}{1+x}\right) = 1/\mathrm{e}.$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{\ln x}{1/\operatorname{sen} x}\right) = \boxed{\exp\left(-\tfrac{\infty}{\infty}\right)} = \exp\left(-\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x}\right) = 1.$

(g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1-x)}{x^2-1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-1}{2x(1-x)} = 0.$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)\operatorname{cotg} x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)\cos x}{\operatorname{sen} x} = \boxed{\frac{0}{0}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x\,(2\cos x - 1)}{\cos x} = 0.$

(i) $\lim\limits_{y\to\pi/2} \left(\frac{\pi}{2}-y\right)\tan y = \lim\limits_{y\to\pi/2} \dfrac{\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\operatorname{sen} y}{\cos y} = \boxed{\frac{0}{0}} = \lim\limits_{y\to\pi/2} \dfrac{-\operatorname{sen} y + \left(\frac{\pi}{2}-y\right)\cos y}{-\operatorname{sen} y} = 1.$

(j) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\ln(1+t)}{\log_2 t} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t\ln 2}{1+t} = \ln 2.$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} (x+e^x)^{1/x} = \boxed{1^\infty} = \lim\limits_{x\to 0} \exp\left[\dfrac{\ln(x+e^x)}{x}\right] = \boxed{\exp\left(\frac{0}{0}\right)} = \exp\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+e^x}{x+e^x}\right) = e^2\,.$

(l) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right) = \boxed{\infty\times 0} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{1/x} = \boxed{\frac{0}{0}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1.$

2. Limite sem a Regra de L'Hôpital.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9+1/x}}{\sqrt{1+1/x}} = \sqrt{9} = 3.$

(b) $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \dfrac{\sec x}{\tan x} = \lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = 1.$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}} = 1.$ .... (limite fundamental: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$)

(d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cosec} x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \cos x = 1.$

3. O ítem (a) está incorreto, porque a Regra de L'Hôpital não se aplica. O ítem (b) está correto; o limite é calculado com a substituição $x = 3$.

4. Considere os seguintes pares de funções:

(a) $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = x^2$ (b) $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = x$ (c) $f(x) = 3x$ e $g(x) = x^2$.

5. A regra de L'Hôpital não se aplica.

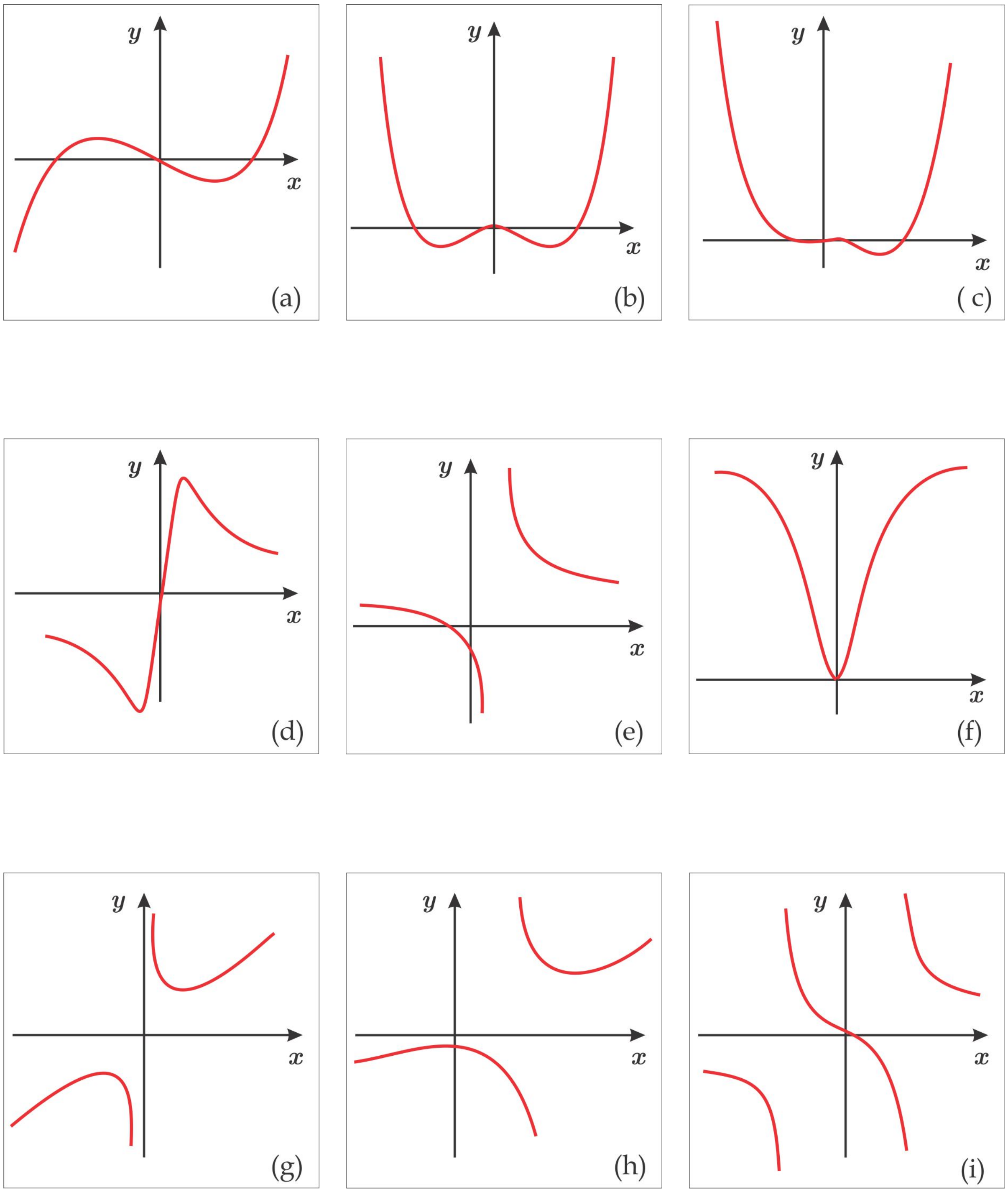
(a) Temos que

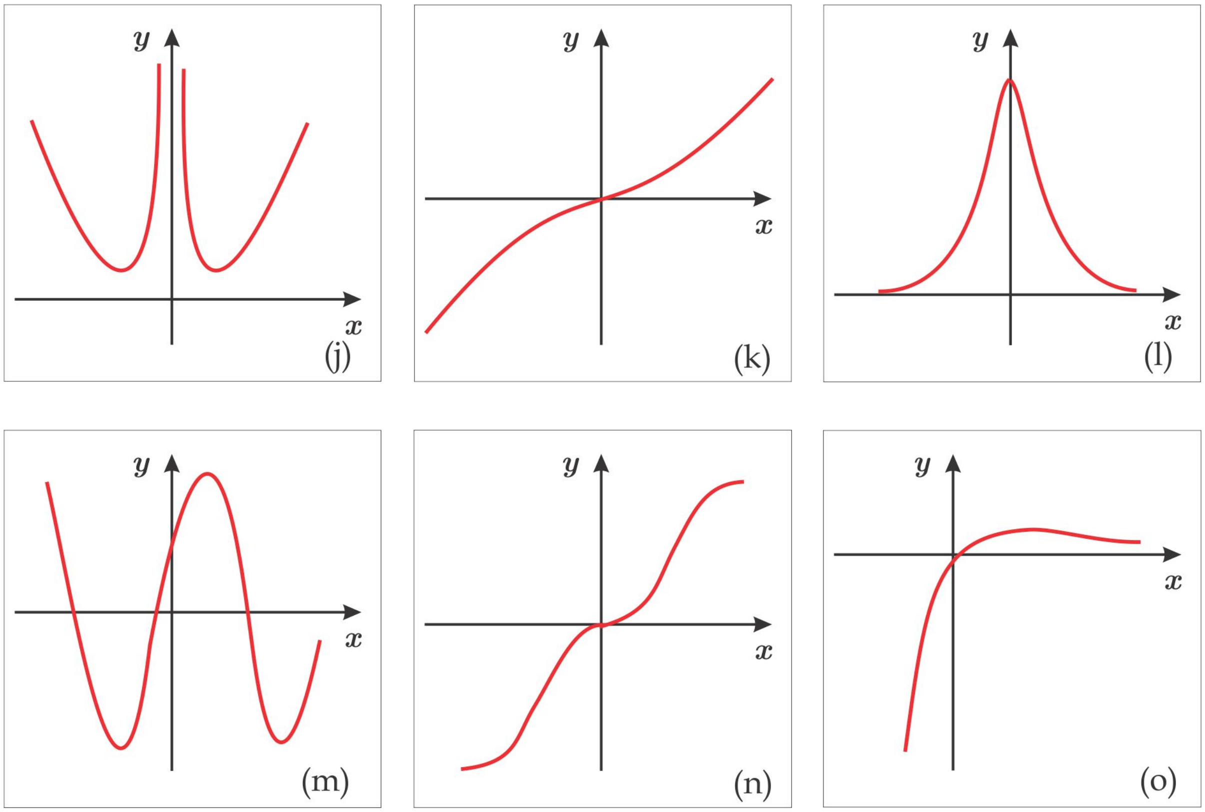
$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+2}{x+1} = 2.$$

(b) Esse exemplo não viola a Regra de L'Hôpital, porque as funções envolvidas não são deriváveis em $x = 0$ e, portanto, a regra não se aplica.

ESCREVENDO PARA APRENDER 6.5

1. Antes de esboçar o gráfico não esqueça de determinar os pontos extremos , as regiões de crescimento ou decrescimento e as inflexões da função, caso existam.





2. As conclusões se baseiam em (6.18), (6.19) e (6.21).

   (a) $x = 0$ é uma assíntota vertical, porque $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

   (b) $x = 0$ é uma assíntota vertical, porque $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$. O eixo x é uma assíntota horizontal.

   (c) Temos que $\lim\limits_{x \to \pm 2^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ e isso indica que as retas $x = \pm 2$ são assíntotas verticais. Por outro lado, usando a regra de L'Hôpital, temos:

$$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = 1$$

   e, portanto, $y = 1$ é uma assíntota horizontal.

   (d) Ao calcular $\lim\limits_{x \to \infty} |f(x) - x|$, obtemos:

$$\lim_{x \to \pm\infty} |f(x) - x| = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x|}{x^2 + 1} = 0.$$

   de onde concluímos que $y = x$ é uma assíntota (oblíqua) ao gráfico de $f(x)$.

   (e) A reta $x = 1$ é uma assíntota vertical e $y = x$ é uma assíntota oblíqua.

(f) $x = 1$ é uma assíntota vertical.

(g) $y = \pm x$ são assíntotas oblíquas.

(h) $y = 1$ é uma assíntota horizontal.

(i) Temos:

$$\lim_{x \to \pm 1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$$

e, portanto, $x = \pm 1$ são assíntotas verticais. Para verificar que $y = x$ é uma assíntota oblíqua, note que:

$$\lim_{x \to \infty} \left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - x \right| = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\left| x + x\sqrt{1 - 1/x^2} \right| \sqrt{1 - 1/x^2}} = 0.$$

De modo similar, temos:

$$\lim_{x \to -\infty} \left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} + x \right| = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\left| x - x\sqrt{1 - 1/x^2} \right| \sqrt{1 - 1/x^2}} = 0.$$

e isto indica que $y = -x$ é também assintota oblíqua.

(j) Temos:

$$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x} = 0$$

e, portanto, a curva é assintótica ao eixo x.

3. O problema consiste em determinar a e b, com $a \neq 0$, tais que:

$$\lim_{x \to \infty} \left| \frac{4 - x^2}{x + 1} - (ax + b) \right| = 0.$$

Um cálculo direto nos dá $a = b = -1$.

4. Se $y \geq 0$, então mostre que:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left| \tfrac{b}{a}\sqrt{a^2 + x^2} - \left(\pm \tfrac{b}{a} x\right) \right| = 0.$$

Racicocínio semelhante se aplica no caso em que $y \leq 0$.

Introdução

Inicialmente, como motivação, vamos considerar três problemas típicos do cálculo.

■ PROBLEMA I: Encontrar a curva γ do plano xy que passa no ponto $A(1,-1)$ e, no ponto genérico $P(x,y)$, tem declividade $3x^2$. Olhando a curva γ como o gráfico de certa função $y = f(x)$, temos $y' = 3x^2$ e a curva γ é governada por uma equação do tipo $y = x^3 + C$, sendo C constante, já que:

$$y' = \frac{d}{dx}\left(x^3 + C\right) = 3x^2.$$

Considerando que a curva passa no ponto $A(1,-1)$, encontramos:

$$-1 = 1^3 + C \Leftrightarrow C = -2$$

e, sendo assim, a curva γ é o gráfico da função $y = x^3 - 2$. O raciocínio por trás do método consiste em encontrar uma função $F(x)$, tal que $F'(x) = 3x^2$ e $F(1) = -1$.

■ PROBLEMA II (ÁREA COMO LIMITE DE SOMAS): Neste problema modelo, vamos calcular a área da parte do plano xy entre o eixo Ox, a reta $x = 1$ e a parábola $y = x^2$, ilustrada na Figura 7.1.

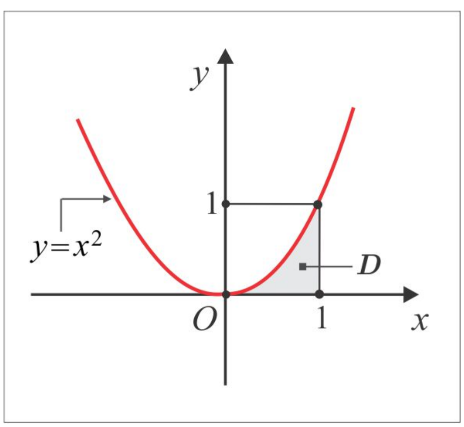


Figura 7.1: Região D.

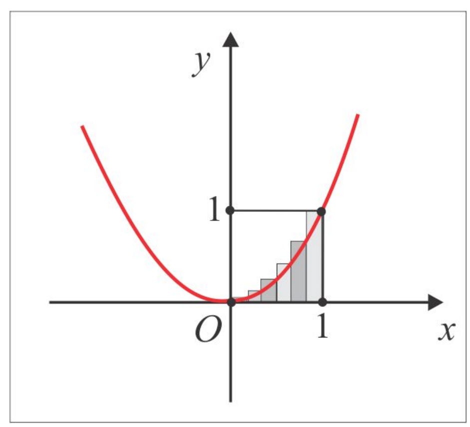


Figura 7.2: Áreas Elementares.

O método consiste em particionar o intervalo $[0,1]$ em subintervalos de comprimento $\Delta x = 1/n$, sendo n um número natural, e aproximar a área pela soma das áreas dos retângulos elementares de base $\Delta x = 1/n$ e altura $h = (k/n)^2$, $k = 1, 2, 3, \ldots n$, como ilustra a Figura 7.2, no caso $n = 6$. Um retângulo genérico de base $\Delta x = 1/n$ e altura $h = (k/n)^2$ tem área $A_k = k/n^3$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, e a soma $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ é uma aproximação, por excesso, da área procurada, isto é:

$$\begin{aligned} A(D) &\simeq A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \frac{1}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{3^3}{n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3} \\ &= \frac{1}{n^3}\Big[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots n^2\Big]. \end{aligned}$$

Agora, usando o Método de Indução Finita, demonstra-se que:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots n^2 = \frac{1}{6}\Big[n(n+1)(2n+1)\Big]$$

e, portanto:

$$A(D) \simeq \frac{1}{6n^3}\Big[n(n+1)(2n+1)\Big] = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}. \tag{7.1}$$

A aproximação em (7.1) será tão melhor quanto maior for o número n e é natural pensar na área como o limite com $n \to \infty$ e, desta forma, encontramos:

$$A(D) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Por fim, ressaltamos que a função $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ é tal que:

$$\boxed{F'(x) = x^2 \quad \text{e} \quad F(1) - F(0) = A(D).}$$

■ **PROBLEMA III (UM VOLUME DE REVOLUÇÃO):** A curva $\gamma : y = (H/R)\,x$, $0 \le x \le R$, gira em torno do eixo Oy, produzindo um cone de revolução de raio R e altura H, ilustrado na Figura 7.3.

Imitando o processo usado o Problema II, deixe-nos considerar no eixo Oy a seguinte partição do intervalo $[0, H]$:

$$0 < \frac{H}{n} < \frac{2H}{n} < \frac{3H}{n} < \cdots < \frac{nH}{n} = H,$$

onde cada subintervalo tem comprimento H/n.

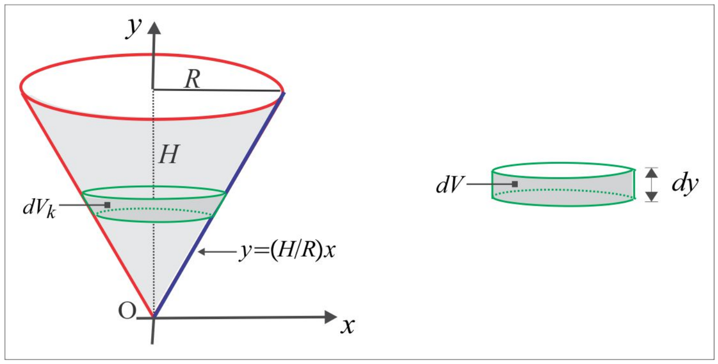


Figura 7.3: Cone de Revolução.

O volume da fatia infinitesimal dV_k é aproximada pelo volume dV do cilindro de altura $dy = kH/n$ e raio kR/n, isto é:

$$dV_k \simeq \pi (kR/n)^2 (kH/n) = \frac{\pi k^2 R^2 H}{n^3}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

e o volume do cone é aproximado pela soma dos volumes elementares: $dV_1 + dV_2 + dV_3 + \cdots + dV_n$. Assim, o volume V do cone é dado por:

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n\to\infty} (dV_1 + dV_2 + dV_3 + \cdots + dV_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\pi R^2 H}{n^3} \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right) \right] = \frac{1}{3}\pi R^2 H. \end{aligned}$$

7.1 Primitivas

Dada uma função real contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, por *Primitiva* ou *Antiderivada* de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ entendemos qualquer função derivável $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, tal que:

$$F'(x) = f(x), \quad a \le x \le b.$$

Um fato simples, mas fundamental é que duas primitivas $F(x)$ e $G(x)$ de uma dada função $f(x)$ diferem por uma constante. De fato, sendo $F(x)$ e $G(x)$ primitivas de $f(x)$, então $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = f(x)$ em $[a, b]$, de modo que:

$$\frac{d}{dx}[F(x) - G(x)] = F'(x) - G'(x) = 0, \quad a \le x \le b,$$

e, portanto, $F(x) - G(x) = C$, $\forall\ x$, sendo C uma constante.

EXEMPLO 7.1.1 *As primitivas elementares são obtidas a partir das regras de derivação. Na tabela abaixo exibimos a função $f(x)$, sua derivada $f'(x)$ e suas primitivas $F(x)$.*

Função	*Derivada*	*Primitiva*
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$F(x) = x^3/3 + C$
$f(x) = 1/x$	$f'(x) = -1/x^2$	$F(x) = \ln\|x\| + C,\ x \neq 0$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$	$F(x) = \operatorname{sen} x + C$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$
$f(x) = 5x^4$	$f'(x) = 20x^3$	$F(x) = x^5 + C$

EXEMPLO 7.1.2 *Dado um número real $p \neq -1$, as primitivas de $f(x) = x^p$ são $F(x) = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C$. De fato, por derivação, temos*:

$$F'(x) = \frac{1}{p+1}(p+1)\,x^p = x^p = f(x)\,, \quad \forall x.$$

EXEMPLO 7.1.3 *Para cada constante real C, a função $F(x) = \ln x + \frac{1}{3}x^3 + C$ é uma primitiva de $f(x) = 1/x + x^2$, no intervalo $0 < x < \infty$, e a primitiva que satisfaz $F(1) = 2$ é determinada ao encontrar o valor de C. Temos*:

$$F(1) = 2 \Leftrightarrow 2 = \ln 1 + \frac{1^3}{3} + C \Leftrightarrow C = 5/3$$

e a primitiva particular é $F(x) = \ln x + \frac{1}{3}x^3 + 5/3$.

As primitivas de f constituem a *Integral Indefinida* de f e anotamos:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

sendo C constante e $F(x)$ uma primitiva particular de $f(x)$. A seguir apresentamos as derivadas e primitivas das funções usuais do cálculo.

TABELA I: REGRAS BÁSICAS DE DERIVAÇÃO

1. Regra da soma: .... $(u + k \cdot v)' = u' + k \cdot v'$, k constante
2. Regra do Produto: .... $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

3. Regra do Quociente: .... $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

4. Regra da Potência: .... $\frac{d}{dx}[x^p] = px^{p-1}$

5. Regra da Cadeia I: .... $\frac{d}{dx}[f(u(x)] = f'(u(x) \cdot u'(x)$

6. Regra da Cadeia II: (Notação de Leibniz) .... $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

TABELA II: AS FUNÇÕES ELEMENTARES E SUAS DERIVADAS

1. Potência de x: .... x^p; $D(x^p) = px^{p-1}$

2. Logaritmo Natural de x: .... $\ln x$ ou $\log x$; $D(\ln x) = 1/x,\ x > 0$

3. Exponencial de x: .... e^x ou $\exp x$; $D(e^x) = e^x$

4. Seno de x: .... $\sin x$ ou $\operatorname{sen} x$; $D(\operatorname{sen} x) = \cos x$

5. Cosseno de x: .... $\cos x$; $D(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

6. Tangente de x: .... $\tan x$ ou $\operatorname{tg} x$; $D(\tan x) = \sec^2 x$

7. Secante de x: .... $\sec x$ $D(\sec x) = \sec x \tan x$

8. Cotangente de x .... $\cot x$ ou $\operatorname{cotg} x$; $D(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

9. Cossecante de x: .... $\csc x$ ou $\operatorname{cosec} x$; $D(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$

Se $f(x)$ é uma função cuja derivada não se nula no intervalo (a, b), então sua inversa $g(y)$ é derivável no intervalo (c, d), imagem do intervalo (a, b), com derivada:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad a < x < b, \quad y = f(x). \tag{7.2}$$

Com auxílio da fórmula (7.2) podemos chegar às derivadas das funções trigonométricas inversas, em um intervalo adequado.

1. Derivada do Arcoseno: .... $D(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -\pi/2 < x < \pi/2.$

2. Derivada do Arcocosseno: .... $D(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < \pi.$

3. Derivada do Arcotangente: .... $D(\text{arctg}\, x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad -\pi/2 < x < \pi/2.$

4. Derivada do Arcocotangente: .... $D(\text{arccotg}\, x) = -\dfrac{1}{1+x^2}, \quad 0 < x < \pi/2.$

5. Derivada do Arcosecante: .... $D(\text{arcsec}\, x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1.$

6. Derivada do Arcocosecante: .... $D(\text{arccosec}\, x) = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1.$

■ **TABELA III: TABELA BÁSICA DE PRIMITIVAS** A partir das derivadas das funções básicas, obtemos a seguinte tabela de primitivas:

01. $\displaystyle\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad p \neq -1$	02. $\displaystyle\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
03. $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C, \quad x \neq 0$	04. $\displaystyle\int \text{cosec}^2 x dx = -\text{cotg}\, x + C$
05. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$	06. $\displaystyle\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
07. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0 \text{ e } a \neq 1$	08. $\displaystyle\int \text{cosec}\, x \cot x dx = -\text{cosec}\, x + C$
09. $\displaystyle\int \text{sen}(kx) dx = -\frac{\cos(kx)}{k} + C$	10. $\displaystyle\int \cos(kx) dx = \frac{\text{sen}(kx)}{k} + C$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arcsen}\, x + C$	12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$
13. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$	14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = -\text{arccotg}\, x + C$
15. $\displaystyle\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \text{arcsec}\, x + C$	16. $\displaystyle\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = -\text{arccosec}\, x + C$

ESCREVENDO PARA APRENDER 7.1

1. Em cada caso, determine a primitiva $F(x)$ da função $f(x)$, satisfazendo à condição especificada.

   (a) $f(x) = \sqrt[4]{x};\ F(1) = 2$ (b) $f(x) = x^2 + 1/x^2;\ F(1) = 0$ (c) $f(x) = (x+1)^{-1};\ F(0) = 2.$

2. Certa função derivável $f(x)$ é tal que $f(x) > 0,\ \forall x$, e $f(1) = 1$. Sabendo que $f'(x) = xf(x)$, encontre a expressão que representa $f(x)$. (sug.: derive a função $g(x) = \ln[f(x)]$)

3. Sejam f e g funções deriváveis em $\mathbb{R}$ e suponha que $f(0) = 0$ e $g(0) = 1$. Se $f'(x) = g(x)$ e $g'(x) = -f(x)$, $\forall x$, mostre que função $h(x) = [f(x) - \operatorname{sen} x]^2 + [g(x) - \cos x]^2$ tem derivada nula e, portanto, é constante. A partir daí deduza que $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$.

4. Em cada caso, calcule a integral indefinida $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

   (a) $f = x^3 - 5x$ (b) $f = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$ (c) $f = 2\operatorname{sen} x - \dfrac{1}{x^5}$ (d) $f = \left(1 + x^2\right)^2$

   (e) $f = \left(1 + x^2\right)^{-1}$ (f) $f = \operatorname{tg}^2 x - \sqrt{1 + x}$ (g) $f = \sqrt{x} + \sec^2 x$ (h) $f = x^3\sqrt{x}$

   (i) $f = 2^x + e^{x+1}$ (j) $f = 2 + x^2 + \cos(2x)$ (k) $f = \sec^2(4x + 2)$ (l) $f = \cos^2 x$

   (m) $f = 2 + \operatorname{sen}^2 x$ (n) $f = \sec(2x)\operatorname{tg}(2x)$ (o) $f = (x + 1)\,x^{-1}$ (p) $f = x\,(x + 1)^{-1}$

5. Mostre que $F(x) = \pm\frac{1}{p}\exp(\pm x^p)$, $p \neq 0$, é a primitiva de $f(x) = x^{p-1}\exp(\pm x^p)$, tal que $F(0) = \pm 1/p$. Agora, em cada caso escolha p e calcule as integrais indefinidas:

   (a) $\displaystyle\int x\exp\left(x^2\right)dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{\exp\left(\sqrt{x}\right)dx}{\sqrt{x}}$ (c) $\displaystyle\int x\exp\left(-x^2\right)dx$ (d) $\displaystyle\int x^3\exp\left(-x^4\right)dx.$

6. Determine a função f que satisfaz a: $f''(x) = x^2 + e^x$, $f(0) = 2$ e $f'(0) = 1$.

7.2 A integral como área

Assim como a derivada, a integral, que passaremos a definir, tem origem geométrica. Deixe-nos considerar uma função contínua $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, que, por simplicidade, será suposta não negativa, isto é, $f(x) \geq 0$, para todo x no intervalo $[a, b]$. Na Figura (7.4) ilustramos a derivada como declividade da reta tangente ao gráfico da função f, enquanto a Figura (7.5) ilustra o retângulo elementar dA, de base infinitesimal Δx e altura $f(x)$, utilizado na aproximação da área sob o gráfico de f.

A área da região D acima do eixo Ox, delimitada pelo o gráfico da função f e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é aproximada pela soma das áreas dos retângulos elementares dA e, assim, temos:

$$\boxed{A(D) \approx \sum_{\Delta x} dA = \sum_{\Delta x} f(x)\Delta x.} \tag{7.3}$$

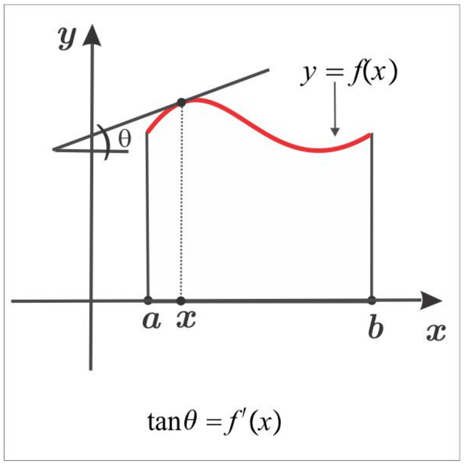


Figura 7.4: A derivada $f'(x)$.

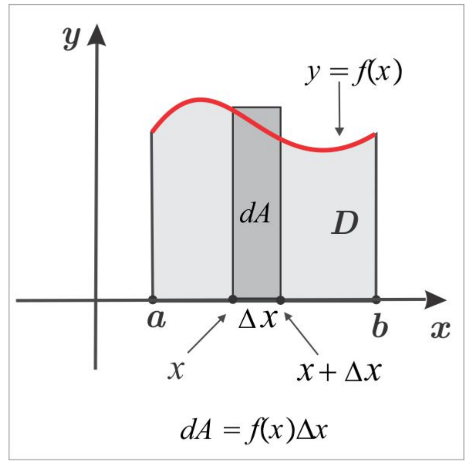


Figura 7.5: A Área Elementar dA.

Demonstra-se que a soma do lado direito de (7.3) tem limite finito, com $\Delta x \to 0$, e este limite, que é o valor da área $A(D)$, será indicado por:

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\sum_{\Delta x} f(x)dx\right) = A(D)} \tag{7.4}$$

e na literatura recebe o nome de *Integral Definida* de f no intervalo $[a,b]$. É claro que se $a = b$, então então a região D se reduz a um segmento de reta e temos:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Ao escrever $\int_a^b f(x)\,dx$ estamos admitindo $a \leq b$ e, por definição, estabelecemos que:

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.} \tag{7.5}$$

O sinal negativo no lado direito de (7.5) aparece ao *inverter a orientação* do intervalo $[a,b]$.

Sobre o símbolo de integral introduzido em (7.4), destacamos:

(a) O símbolo $\int$ faz referência à letra S e indica soma de *infinitésimos* (as áreas elementares dA).

(b) Os números a e b são os *limites de integração* e a função $f(x)$ recebe o nome de *integrando.*

(c) Normalmente se usa dx para indicar o infinitésimo no eixo Ox. Ele representa a base do retângulo elementar dA e indica que x é a *variável de integração.* Assim:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\theta)\,d\theta, \quad \text{etc.}$$

■ **PROPRIEDADES BÁSICAS:** As propriedades da integral dadas a seguir ou são consequências das propriedades do limite ou seguem do conceito de integral como área. No caso em que o gráfico de certa função $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ situa-se abaixo do eixo Ox, teremos $g(x) \leq 0$ no intervalo $c \leq x \leq d$ e, portanto, $g(x) \Delta x \leq 0$. Logo, $dA \simeq -g(x)\, dx$ e assim:

$$A(D) = -\lim_{\Delta x \to 0} \left(\sum g(x) \Delta x \right) = -\int_a^b g(x)\, dx. \tag{7.6}$$

A Figura 7.6 ilustra os casos com $f \geq 0$ e $g \leq 0$.

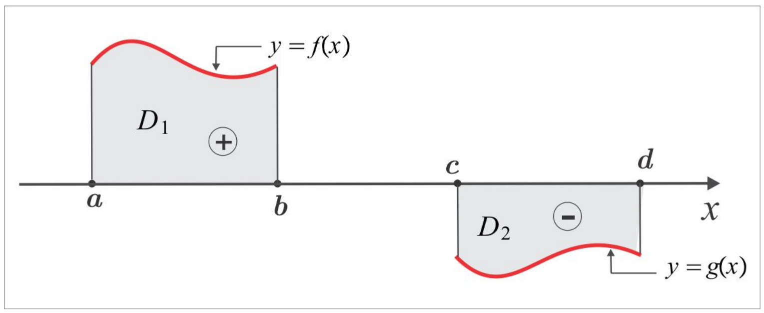


Figura 7.6: $A(D_1) = \int_a^b f(x)\, dx$ e $A(D_2) = -\int_c^d g(x)\, dx$.

(P1) Linearidade: Se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções contínuas no intervalo $a \leq x \leq b$ e k é uma constante, então:

$$\boxed{\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \text{e} \quad \int_a^b [k \cdot f(x)]\, dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx.} \tag{7.7}$$

(P2) Aditividade: Dado um número real c entre a e b, então:

$$\boxed{\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx} \tag{7.8}$$

como ilustrado na Figura 7.7. A área da região D sob o gráfico é $A(D) = A(D_1) + A(D_2)$.

(P3) Desigualdades: Se $f(x) \leq g(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$, então:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.} \tag{7.9}$$

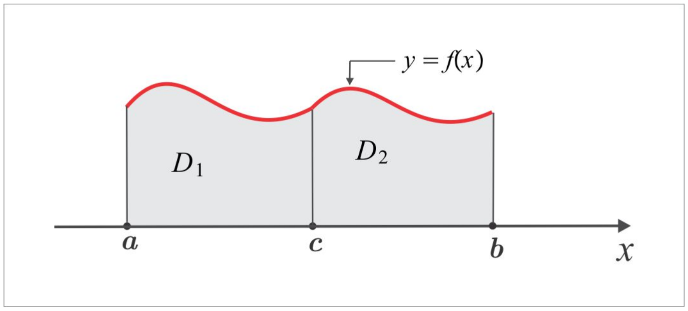


Figura 7.7: $A(D_1 \cup D_2) = A(D_1) + A(D_2)$.

Como consequência de (7.9) e das desigualdades $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, deduzimos que:

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.} \tag{7.10}$$

OBSERVAÇÃO 7.2.1 *Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é dita contínua por partes ou parcialmente contínua quando ela for contínua no intervalo $[a,b]$, exceto, possivelmente, em uma quantidade finita de pontos $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ do intervalo $[a,b]$. Uma tal função com limites laterais finitos nas possíveis descontinuidades $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ é integrável em $[a,b]$ e temos:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \cdots + \int_{x_k}^b f(x)dx.} \tag{7.11}$$

A Figura 7.8 ilustra o gráfico de uma função f contínua por partes onde vemos as descontinuidades nos pontos $x_1,\ x_2$ e x_3.

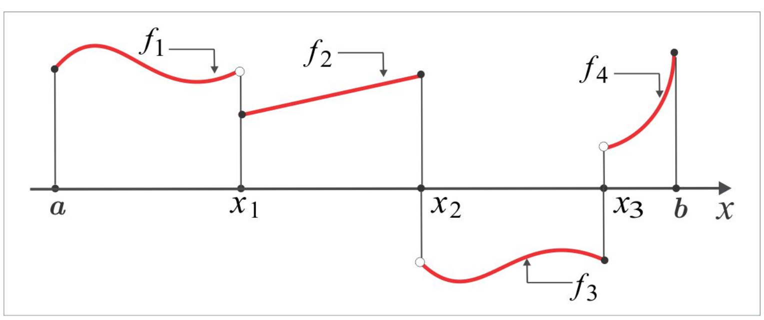


Figura 7.8: Função Contínua por Partes

■ **O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO:** Dada uma função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, deixe-nos considerar a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \le x \le b. \tag{7.12}$$

No caso em que $f(x)$ é uma função não negativa, o valor $F(x)$ é precisamente a área abaixo do gráfico de f, entre $t = a$ e $t = x$, como ilustra a Figura 7.9.

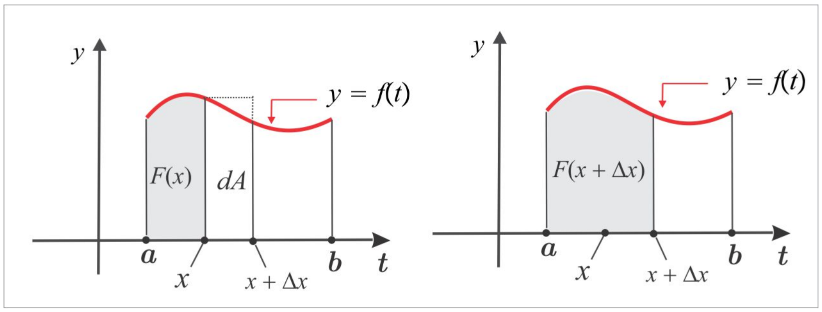


Figura 7.9: $F(x + \Delta x) - F(x) = dA \simeq f(x)\,\Delta x$.

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece que $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ e para comprová–lo, olhamos a Figura 7.9 para deduzir que:

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \simeq \frac{1}{\Delta x}\left[f(x)\,\Delta x\right] = f(x) \tag{7.13}$$

e fazendo $\Delta x \to 0$ em (7.13), encontramos:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}\right] = f(x). \qquad \blacksquare$$

A primitiva dada por (7.12) é tal que $F(a) = 0$ e qualquer outra primitiva $G(x)$ é da forma:

$$G(x) = F(x) + C = \int_a^x f(t)\,dt + C$$

e considerando $x = a$, obtemos $C = G(a)$, de modo que:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).} \tag{7.14}$$

O Teorema Fundamental do Cálculo, que é um instrumento útil no cálculo de integrais definidas, se apresenta sob duas formas equivalentes:

(1) Derivada sob o sinal de integral: .... $\boxed{\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x), \quad a \le x \le b.}$

(2) Integral da derivada: .... $\boxed{\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a), \quad a \le x \le b.}$

EXEMPLO 7.2.2 *Para calcular a área da região $D = D_1 \cup D_2$, ilustrada na Figura 7.10, usamos a propriedade aditiva (7.11) e um cálculo direto nos dá:*

$$A(D) = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (x/2)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

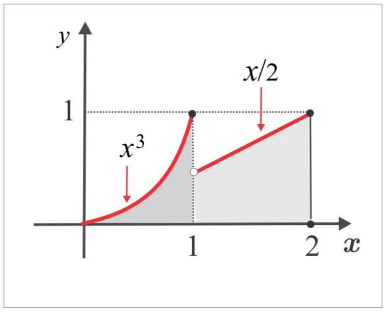


Figura 7.10: Região do Exemplo 7.2.2.

EXEMPLO 7.2.3 (Área entre duas Curvas) *Calcular a área da região D do primeiro quadrante, entre as curvas $y = x^2$ e $y = x$. A Figura 7.11 ilustra graficamente a situação geral, onde vemos que:*

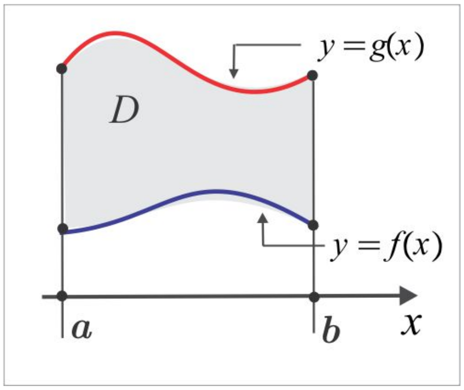


Figura 7.11: Área entre duas curvas.

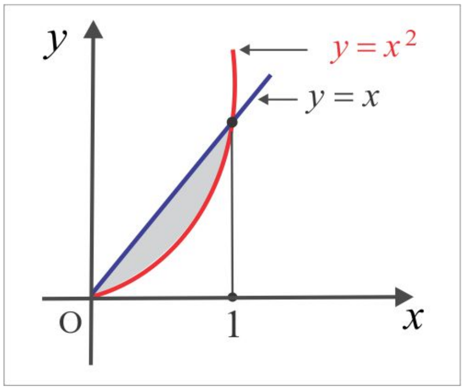


Figura 7.12: Área entre duas curvas.

$$\boxed{A(D) = \int_a^b \Big[g(x) - f(x)\Big]dx.} \tag{7.15}$$

No caso particular das curvas $y = x^2$ e $y = x$, ilustrado na Figura 7.12, encontramos:

$$A(D) = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1/6.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 7.2

1. Se k é um número inteiro não negativo, calcule o valor de:

   (a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(kt)\,dt$ (b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\operatorname{sen}(kt)\,dt$ (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \left[\cos^2(kt) - \operatorname{sen}^2(kt)\right] dt.$

2. Encontre a equação da curva que passa no ponto $A(-3,0)$ e cuja inclinação da reta tangente, em cada um de seus pontos (x,y), é $m(x) = 2x+1$.

3. DERIVAÇÃO SOB O SINAL DE INTEGRAL Deixe f ser uma função contínua em $[a,b]$ e suponha que $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ sejam funções de $(a,b) \to [a,b]$ deriváveis. Se

$$\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt,$$

   mostre que φ é derivável em (a,b) e deduza a Regra de Leibniz:

$$\varphi'(x) = f(\beta(x))\,\beta'(x) - f(\alpha(x))\,\alpha'(x)\,. \tag{7.16}$$

4. Usando a Regra de Leibniz (7.16), calcule $\varphi'(x)$ em cada caso abaixo:

   (a) $\displaystyle\varphi(x) = \int_1^x \sqrt[3]{1+t^4}\,dt$ (b) $\displaystyle\varphi(x) = \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} (\ln t)^5\,dt$ (c) $\displaystyle\varphi(x) = \int_{x^2-1}^{\exp x} \cos\left(t^2\right) dt.$

5. Em cada caso abaixo, calcule a integral definida de f, no intervalo I indicado.

   (a) $I = [-1,1];\ f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x < 0 \\ x^2 - x + 1, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$ (b) $I = [-2,2];\ f(x) = |x-1|$

   (c) $I = [-\pi,\pi];\ f(x) = |\operatorname{sen} x|$ (d) $I = [-\pi,\pi];\ f(x) = x + |\cos x|$

   (e) $I = [-3,5];\ f(x) = \left|x^2 - 3x + 2\right|$ (f) $I = [-\pi,\pi];\ f(x) = x - |x|$

6. Em cada caso, calcule a área da região $\mathcal{R}$.

   (a) $\mathcal{R}$ é delimitada pelas curvas $y = x^4$ e $y = x^2$, para $0 \leq x \leq 1$.

   (b) $\mathcal{R}$ é delimitada pelas curvas $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = x^3$, para $0 \leq x \leq 1$.

   (c) $\mathcal{R}$ é delimitada pelas curvas $y = |x|$ e $y = -x^2$, para $-1 \leq x \leq 1$.

   (d) $\mathcal{R}$ é delimitada pelas curvas $y = -x^2 + 4$ e $y = x^2$.

(e) $\mathcal{R}$ é delimitada pelo eixo y e pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$, para $0 \le x \le \pi/4$.

(f) $\mathcal{R}$ é delimitada pelas retas $x = 0,\ x = 1,\ y = 2$ e pela parábola $y = x^2$.

(g) $\mathcal{R}$ é delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

(h) $\mathcal{R}$ é delimitada pela curva $y = \sqrt{x}$ e pelas retas $y = x - 2$ e $y = 0$.

(i) $\mathcal{R}$ é delimitada pela curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ e o eixo x.

(j) $\mathcal{R}$ é delimitada pelas parábolas $y = -x^2 + 6x$ e $y = x^2 - 2x$.

7. Em cada caso, esboce o gráfico da região $\mathcal{R}$ e calcule sua área.

(a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $0 \le x \le 2$ e $x^2 \le y \le 4\}$.

(b) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $x \ge 0$ e $x^2 - x \le y \le -x^2 + 5x\}$.

(c) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $0 \le x \le 1/y$ e $1 \le y \le 2\}$.

(d) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $0 \le x \le 1$ e $x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$.

(e) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $-1 \le x \le 1$ e $0 \le y \le |x|^3\}$.

8. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^3/4, \text{ para } x < 0 \\ x^2 - x - 2, \text{ para } 0 \le x < 3 \\ 16 - 4x, \text{ para } x \ge 3. \end{cases}$$

Calcule $\displaystyle\int_{-2}^{5} f(x)\,dx$ e, também, a área entre o gráfico de f e o eixo x, de $x = -2$ até $x = 5$. Por que o valor da integral e o valor da área são distintos?

9. Em cada caso, identifique a região do plano xy cuja área é representada pela integral e calcule o valor da área.

(a) $\displaystyle\int_0^1 dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 2x\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^0 (4 + 3x)\,dx$ (d) $\displaystyle\int_{-5}^{-3} (x + 5)\,dx + \int_{-3}^0 2dx + \int_0^4 (2 - \sqrt{x})\,dx$.

10. Suponha que $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ seja uma função par e que $g : [-a, a] \to \mathbb{R}$ seja uma função ímpar. Mostre que:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 0.$$

11. Considere a função $y = f(t)$, ilustrada na Figura 7.13 e defina a função g por:

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Calcule $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ e $g(6)$. Em que intervalo a função g está crescendo? Quando g atinge seu valor máximo?

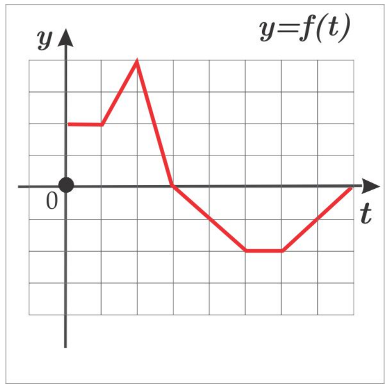


Figura 7.13: Função $y = f(t)$ do Exercício 11.

7.3 Integrais Impróprias

Quando a função $f(x)$ não é limitada no intervalo $[a, b]$ ou este inetrvalo não é limitado (isto ocorre se $a = -\infty$ ou $b = \infty$) a integral de f no intervalo (a, b) denominar-se-á *Integral Imprópria*. A integral imprópria de f pode ser convergente ou divergente, conforme ela tenha um valor real ou não. Investiguemos a convergência ou não das seguintes integrais impróprias:

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \textbf{(b)} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \quad \textbf{(c)} \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} \quad \textbf{(d)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x)\,dx.$$

Notamos que em (a) e (c) os respectivos integrandos não são limitados, tendo em vista que:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1/\sqrt{x}\right) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} (1/x) = -\infty.$$

e nos outros casos, o intervalo de integração não é limitado.

(a) Temos:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = 2 \lim_{a\to 0^+} \left(\sqrt{1} - \sqrt{a}\right) = 2$$

e a integral imprópria converge e tem valor 2.

(b) Usando $F(x) = \arctan x$ como primitiva de $\left(1+x^2\right)^{-1}$, lembrando que $\lim\limits_{x\to\infty} (\arctan x) = \pi/2$ e $\arctan 0 = 0$, encontramos:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \Big[\arctan x\Big]_0^b = \lim_{x\to\infty} (\arctan b) = \pi/2.$$

A integral é convergente e tem valor $\pi/2$.

(c) Neste caso, a integral é divergente, porque:

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x} = \lim_{b\to 0^-} \int_{-1}^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to 0^-} \Big[\ln|x|\Big] = \lim_{b\to 0^-} \ln|b| = -\infty.$$

(d) Um cálculo direto nos dá:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^b \exp(-x)\,dx = -\lim_{b\to\infty} \left[e^{-b} - e^b\right] = +\infty$$

de onde resulta que a integral é divergente.

EXEMPLO 7.3.1 *Usando a primitiva* $F(x) = -\frac{1}{2}\exp\left(-x^2\right)$ *da função* $f(x) = x\exp\left(-x^2\right)$, *estabelecida no Exercício 5 da seção Escrevendo para Aprender* 7.1, *encontramos*:

$$\int_{-\infty}^0 x\exp\left(-x^2\right)dx = \lim_{B\to-\infty} \left[-\frac{1}{2}\exp\left(-x^2\right)\right]_a^0 = -1/2$$

de onde resulta que a integral é convergente e tem valor $-1/2$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 7.3

1. Investigue a *convergência* ou *divergência* das seguintes integrais impróprias.

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$ **(b)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ **(c)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ **(d)** $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ **(e)** $\displaystyle\int_0^\infty x^3 e^{-x^4}dx.$

2. Use $F(x) = (1+x)^{-1}$ como primitiva de $f(x) = \ln(1+x)$ e investigue a converência ou não da integral imprópria:

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+x}.$$

3. Verifique que $F(x) = (5-x)^{-1}$ é primitiva de $f(x) = (5-x)^2$ e estude a natureza (convergente ou divergente) da integral imprópria:
$$\int_1^5 \frac{dx}{(5-x)^2}.$$

7.4 Mudança de Variável

A fórmula de Mudança de Variável tem sua origem na Regra da Cadeia. Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ e $g(x)$ é uma função derivável nos pontos da imagem de f, segue da Regra da Cadeia que:
$$\frac{d}{dx}\big[F(g(x))\big] = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) \tag{7.17}$$
e considerando a mudança de variável $u = g(x)$, lembrando que $du = g'(x)\,dx$, resulta de (7.17):
$$\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C.} \tag{7.18}$$

A expressão em (7.18) é a fórmula de *Mudança de Variável*[1].

EXEMPLO 7.4.1 *Com a fórmula de Mudança de Variável, vamos calcular a integral*:
$$\int \frac{xdx}{x^2+1}.$$

SOLUÇÃO Inicialmente, considerando $f(u) = \dfrac{1}{2u}$ e $g(x) = x^2+1$, obtemos $g'(x) = 2x$ e um cálculo direto nos dá:
$$f(g(x))\,g'(x) = \frac{1}{2(x^2+1)} \cdot 2x = \frac{x}{x^2+1}$$
e usando a fórmula (7.18), resulta:
$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \int f(u)\,du = \tfrac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \tfrac{1}{2}\ln|u| = \tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C.$$

EXEMPLO 7.4.2 *Se $k \neq 0$, considerando a mudança de variável $u = kx$ e $du = kdx$, obtemos*:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(kx)\,dx = \frac{-\cos(kx)}{k} + C$ **(b)** $\displaystyle\int \cos(kx)\,dx = \frac{\operatorname{sen}(kx)}{k} + C$ (**c**) $\displaystyle\int e^{kx}dx = \frac{e^{kx}}{k} + C.$

[1] A fórmula (7.18) traduz a técnica de integração conhecida por *Método de Substituição*.

EXEMPLO 7.4.3 *Com a substituição $u = x^3 + 1$, obtemos $du = 3x^2 dx$ e, assim:*

$$\int x^2 \cos\left(x^3+1\right) dx = \int \tfrac{1}{3} \cos u du = \tfrac{1}{3} \operatorname{sen} u + C = \tfrac{1}{3} \operatorname{sen}\left(x^2+1\right) + C.$$

EXEMPLO 7.4.4 *Calcular as integrais definidas:*

$$(\mathbf{a}) \quad \int_0^{\sqrt{2}} x \exp\left(x^2\right) dx \quad e \quad (\mathbf{b}) \quad \int_{-1}^{2} x^2 \sqrt{x^3+1} dx.$$

SOLUÇÃO Ao usar uma mudança de variável em uma integral definida, os limites de integração devem ser alterados, de acordo com a mudança. No caso (a), consideramos $u = x^2$, $du = 2xdx$ e os novos llimites de integração para variável u são 0 e 2, correspondentes a $x = 0$ e $x = \sqrt{2}$, respectivamente.

(a) Temos:

$$\int_0^{\sqrt{2}} x \exp\left(x^2\right) dx = \int_0^2 e^u \left(\tfrac{1}{2} du\right) = \frac{1}{2} \int_0^2 e^u du = \frac{1}{2} \Big[e^u\Big]_0^2 = \tfrac{1}{2}\left(e^2 - 1\right).$$

(b) Neste caso, fazemos $u = x^3 + 1$, $du = 3x^2 dx$, com $0 \le u \le 9$, e encontramos:

$$\int_{-1}^{2} x^2 \sqrt{x^3+1} dx = \int_0^9 \sqrt{u} \left(\tfrac{1}{3} du\right) = \frac{1}{3} \int_0^9 u^{1/2} du = \frac{1}{3} \left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_0^9 = 6.$$

EXEMPLO 7.4.5 *Com a substituição $u = \cos x$, vamos calcular $\displaystyle\int_0^\pi \cos^3 x \operatorname{sen} x dx$. De fato, por diferenciação temos $du = -\operatorname{sen} x dx$ e, portanto:*

$$\int_0^\pi \cos^3 x \operatorname{sen} x dx = -\int_1^{-1} u^3 du = \int_{-1}^{1} u^3 du = \left[\frac{u^4}{4}\right]_{u=-1}^{u=1} = 0.$$

EXEMPLO 7.4.6 *Considerando $u = \cos x$ e $du = -\operatorname{sen} x dx$, com $-\pi/2 < x < \pi/2$, obtemos:*

$$\int \tan x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x dx}{\cos x} = \int \left(-\frac{du}{u}\right) = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

EXEMPLO 7.4.7 *Integrais de produtos e potências de senos e cossenos podem ser calculadas por uma mudança de variável e as integrais básicas*

$$\int \cos^2 \theta d\theta \quad e \quad \int \operatorname{sen}^2 \theta d\theta$$

aparecem com frequência e são calculadas com auxílio das identidades:

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \quad e \quad \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \tag{7.19}$$

Temos:

$$\boxed{\int \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta) d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} + C.} \tag{7.20}$$

De modo similar, encontramos:

$$\boxed{\int \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2\theta) d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} + C.} \tag{7.21}$$

Por exemplo, para calcular a integral de $\cos^3 x$, *procedemos assim*:

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x dx &= \int \left(1-\operatorname{sen}^2 x\right) \cos x dx = (\textit{usar } u = \operatorname{sen} x) = \int \left(1-u^2\right) du \\ &= u - \frac{u^3}{3} + C = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C.\end{aligned}$$

EXEMPLO 7.4.8 *Calcular a integral definida*:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x dx.$$

SOLUÇÃO Usando o que foi estabelecido no Exemplo 7.4.7, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x dx &= \int_0^{\pi/2} \left[\tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^2 dx = (\text{usar } \theta = 2x) = \frac{1}{8}\int_0^{\pi} (1-\cos\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{8}\left(\int_0^{\pi} d\theta - 2\int_0^{\pi} \cos\theta d\theta + \int_0^{\pi} \cos^2\theta d\theta\right) \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\Big[\operatorname{sen}\theta\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{16}\left[\int_0^{\pi} d\theta + \int_0^{\pi} \cos(2\theta) d\theta\right] = 3\pi/16.\end{aligned}$$

Substituição Trigonométrica

As integrais que envolvem as expressões $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ e $\sqrt{a^2 \pm x^2}$ podem ser calculadas com auxílio de substituições trigonométricas especiais. As substituições mais comuns são $x = a \operatorname{tg}\theta$, $x = a \operatorname{sen}\theta$ e $x = a\sec\theta$, sugeridas a partir das relações nos triângulos retângulos da Figura 7.14, onde vemos que:

(a) a mudança $x = a\operatorname{tg}\theta$ substitui $a^2 + x^2$ por $a^2\sec^2\theta$ e dx por $a\sec^2\theta d\theta$.

(b) a mudança $x = a\operatorname{sen}\theta$ substitui $a^2 - x^2$ por $a^2\cos^2\theta$ e dx por $a\cos\theta d\theta$.

(c) a mudança $x = a\sec\theta$ substitui $x^2 - a^2$ por $a^2\tan^2\theta$ e dx por $a\sec\theta\tan d\theta$.

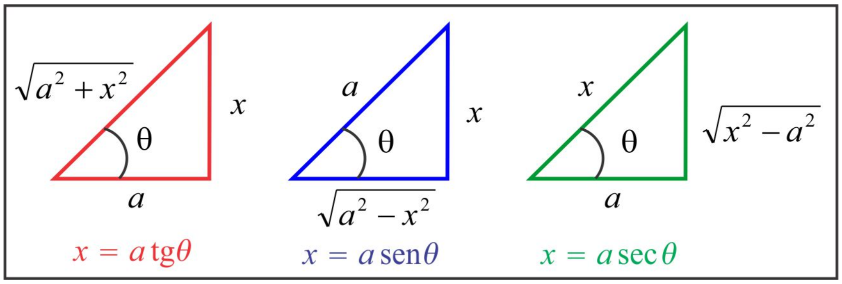


Figura 7.14: Substituição trigonométrica.

EXEMPLO 7.4.9 *Calclular a integral indefinida*:

$$I = \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

SOLUÇÃO No intervalo onde $\cos\theta > 0$, com a substituição $x = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$ e $dx = 2\cos\theta d\theta$, encontramos:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,(2\cos\theta)\,d\theta}{\sqrt{4-4\,\mathrm{sen}^2\,\theta}} = 4\int \frac{\mathrm{sen}^2\,\theta\cos\theta d\theta}{\cos\theta} = 4\int \mathrm{sen}^2\,\theta d\theta = 2\theta - \mathrm{sen}\,(2\theta) + C \\ &= 2\,\mathrm{arcsen}\,(x/2) - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C. \end{aligned}$$

EXEMPLO 7.4.10 *Com a substituição $x = 4\tan\theta$, calcular*:

$$I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+16}}.$$

SOLUÇÃO Temos $dx = 4\sec^2\theta$ e por substituição, obtemos:

$$I = 64\int \sec\theta\tan^3\theta d\theta = 64\int \frac{\mathrm{sen}^3\,\theta d\theta}{\cos^4\theta} = 64\int \frac{\left(1-\cos^2\theta\right)\mathrm{sen}\,\theta d\theta}{\cos^4\theta}$$

e considerando $t = \cos\theta$, resulta:

$$\begin{aligned} I &= 64\int \frac{\left(1-t^2\right)(-dt)}{t^4} = 64\left[\int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dt}{t^4}\right] \\ &= \left(16+x^2\right)^{3/2} - 16\sqrt{16+x^2} + C. \end{aligned}$$

EXEMPLO 7.4.11 *Calcular a área da região $\mathcal{R}$ do plano xy delimitada pela elipse*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

SOLUÇÃO Se $\mathcal{D}$ representa a área da parte da região $\mathcal{R}$ situada no 1º quadrante, como ilustrado na Figura 7.15, então a área $A(\mathcal{R})$ da elipse é dada por:

$$A(\mathcal{R}) = 4 \cdot A(\mathcal{D}) = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx$$

e com a substituição $x = a \operatorname{sen} \theta$, obtemos:

$$\begin{aligned} A(\mathcal{R}) &= \frac{4b}{a}\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\,(a\cos\theta d\theta) = 4ab\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}\ \cos\theta d\theta \\ &= 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta = (\text{usar } 7.20) = \pi ab. \end{aligned}$$

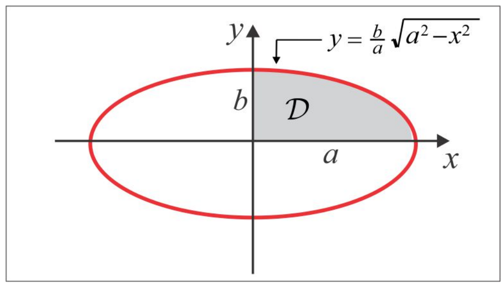


Figura 7.15: Área da Elipse.

ESCREVENDO PARA APRENDER 7.4 (click aqui e veja a lista completa)

1. Com a substituição $u = g(x)$ sugerida, calcule as seguintes integrais.

   (a) $\int e^{kx}dx;\quad u = kx$ . . . . (resp.: $\frac{1}{k}\exp(kx) + C,\ k \neq 0$)

   (b) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2(3x)};\quad u = 3x$ . . . . (resp.: $-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}(3x) + C$)

   (c) $\int \frac{dx}{3x - 7};\quad u = 3x - 7$ . . . . (resp.: $\frac{1}{3}\ln|3x - 7| + C$)

   (d) $\int x\sqrt{x^2 + 1}dx;\quad u = x^2 + 1$ . . . . (resp.: $\frac{1}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C$)

   (e) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3 + 1}};\quad u = x^3 + 1$ . . . . (resp.: $\frac{2}{3}\sqrt{x^3 + 1} + C$)

   (f) $\int \frac{\cos x dx}{\operatorname{sen}^2 x};\quad u = \operatorname{sen} x$ . . . . (resp.: $-\operatorname{cosec} x + C$)

(g) $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+2x+3}$; $u = x^2+2x+3$ .... (resp.: $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+C$)

(h) $\displaystyle\int \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx$; $u = \ln(x+1)$ .... (resp.: $\frac{1}{2}\left[\ln(x+1)\right]^2 + C,\ x > -1$)

(i) $\displaystyle\int \left(e^{5x}+a^{5x}\right)dx$, $a > 0$; $u = 5x$ .... (resp.: $-\dfrac{e^{5x}}{5} + \dfrac{a^{5x}}{5\ln a} + C$)

(j) $\displaystyle\int e^{x^2+4x+3}(x+2)\,dx$; $u = x^2+4x+3$ .... (resp.: $\frac{1}{2}\exp(x^2+4x+3)+C$)

(k) $\displaystyle\int 2x^3\sqrt{x^2+1}dx$; $u = x^2+1$ .... (resp.: $\frac{2}{5}(x^2+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}+C$)

2. Calcule as seguintes integrais envolvendo funções trigonométricas.

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x dx$ .... (resp.: $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$)

(b) $\displaystyle\int \cos^4 x \operatorname{sen}^3 x dx$ .... (resp.: $-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C$)

(c) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x dx}{\operatorname{sen}^4 x}$ .... (resp.: $\operatorname{cosec} x - \frac{1}{3}\operatorname{cosec}^3 x + C$)

(d) $\displaystyle\int \tan^3 x dx$ .... (resp.: $\frac{1}{2}\tan^2 x + \log|\cos x| + C$)

(e) $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^5 x dx$ .... (resp.: $-\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^4 x + \operatorname{cosec}^2 x + \log|\operatorname{sen} x| + C$)

(f) $\displaystyle\int \cos 4x \cos 7x dx$ .... (resp.: $\frac{1}{6}\sin(3x) + \frac{1}{22}\sin(11x) + C$)

(g) $\displaystyle\int \cos^2 x \operatorname{sen}^3 x dx$ .... (resp.: $\frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$)

(h) $\displaystyle\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x dx$ .... (resp.: $\frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C$)

(i) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^p x \cos^3 x dx$ .... (resp.: $\dfrac{(\sin x)^{1+p}}{1+p} - \dfrac{(\sin x)^{3+p}}{3+p} + C$)

(j) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \sec^3 x dx$ .... (resp.: $\frac{1}{2}\sin^3 x \sec^2 x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\log|\sec x + \tan x| + C$)

(k) $\displaystyle\int \cos 2x \operatorname{sen} 4x dx$ .... (resp.: $-\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$)

(l) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x dx$ .... (resp.: $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$)

3. Use uma substituição trigonométrica e calcule as integrais.

(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx$ .... (resp.: $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$)

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$ .... (resp.: $-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+2\text{arcsen}(x/2)+C$)

(c) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2+8x+5}}$ .... (resp.: $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+8x+5}-\frac{1}{2}\ln(2+2x+\sqrt{4x^2+8x+5})+C$)

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ .... (resp.: $\ln\left(1+x+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C$)

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ .... (resp.: $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$)

(f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-5}}$ .... (resp.: $\ln(-2+x+\sqrt{x^2-4x-5})+C$)

(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$ .... (resp.: $\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+C$)

(h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x-3}}$ .... (resp.: $\frac{1}{2}\ln\left(2x-1+\sqrt{4x^2-4x-3}\right)+C$)

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$ .... (resp.: $-\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{9x}+C$)

(j) $\displaystyle\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$ .... (resp.: $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{5}{4}\ln\left|1+2x+\sqrt{4x^2+4x+3}\right)+C$)

(k) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$ .... (resp.: $-\sqrt{-x^2-2x+8}-\arcsin\frac{1}{3}(x+1)+C$)

(l) $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$ .... (resp.: $-\frac{1}{4}x(4-x^2)^{3/2}+\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+2\arcsin(x/2)+C$)

7.5 Integração por Partes

A Fórmula de Integração por Partes tem como alvo as integrais do tipo:

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx$$

e é deduzida a partir da Regra do Produto para derivação. De fato, temos:

$$\frac{d}{dx}\Big[f(x)\cdot g(x)\Big]=f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)$$

de onde resulta, após a integração, a seguinte regra:

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx=f(x)\,g(x)-\int g(x)\,f'(x)\,dx. \tag{7.22}$$

A relação (7.22) é a Fórmula de Integração por Partes, onde observamos que a derivada passou da função g, na integral do lado esquerdo, para a função f na integral do lado direito. Normalmente, a fórmula (7.22) aparece na literatura sob a forma classica:

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{7.23}$$

onde consideramos $u = f(x)$ e $dv = g'(x)\,dx$ e para integral definida a Fórmula de Integração por Partes torna-se:

$$\int_a^b udv = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b vdu. \tag{7.24}$$

O roteiro para integrar por partes consiste no seguinte:

(i) Olhamos a integral sob a forma $\int udv$ e identificamos u e dv. Por diferenciação encontramos u e por integração encontramos v.

(ii) Usamos a fórmula de integração por partes (7.23).

(iii) Calculamos a integral resultante no lado direito de (7.23).

EXEMPLO 7.5.1 *Calcular a integral indefinida de* $x \operatorname{sen} x$.

SOLUÇÃO Notando que $d(-\cos x) = \operatorname{sen} x dx$, temos:

$$\int x \operatorname{sen} x dx = \int xd(-\cos x) = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C.$$

Para chegar ao resultado, escolhemos $u = x$ e $dv = \operatorname{sen} x dx$. Por diferenciação obtemos $du = dx$ e por integração $v = -\cos x$.

EXEMPLO 7.5.2 *Calcular, usando integração por partes, as integrais*:

(a) $\int (xe^x)\,dx$ **(b)** $\int_1^2 (\ln x)\,dx$.

SOLUÇÃO No caso (a), temos:

$$\int (xe^x)\,dx = \int xd(e^x) = (\text{usar } u = x \text{ e } v = e^x) = xe^x - \int e^x dx = (x-1)\,e^x + C.$$

No caso (b), consideramos $u = \ln x$ e $dv = dx$, o que nos dá $du = (1/x)\,dx$ e $v = x$. De (7.24) resulta:

$$\int_1^2 (\ln x)\,dx = \Big[x\ln x\Big]_1^2 - \int_1^2 dx = (2\ln 2 - \ln 1) - (2-1) = 2\ln 2 - 1.$$

EXEMPLO 7.5.3 *No cálculo de integrais do tipo* $\int f(x)\,dx$, *a escolha natural é* $u = f(x)$ *e* $dv = dx$. *Por exemplo*:

$$\int \arctan x dx = (\textit{usar } u = \arctan x \ \textit{e} \ v = x) = x \arctan x - \int \frac{x\ dx}{1+x^2} = x \arctan x - \tfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right).$$

EXEMPLO 7.5.4 *Em alguns casos é necessário aplicar o método duas vezes. De fato*:

$$\begin{aligned}\int e^x \operatorname{sen} x dx &= -\int e^x d(\cos x) = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \\ &= -e^x \cos x + \int e^x d(\operatorname{sen} x) = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x dx\end{aligned}$$

e daí resulta:

$$2\int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) \quad \textit{ou} \quad \int e^x \operatorname{sen} x dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x).$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 7.5 (click aqui e veja a lista completa)

1. Usando o Método de Integração por Partes, calcule as seguintes integrais indefinidas.

(a) $\int x \ln x dx$ .... (resp.: $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$)

(b) $\int x \operatorname{sen}(kx)\,dx$, $k = 1, 2, 3,$ .... (resp.: $\dfrac{\operatorname{sen}(kx)}{k^2} - \dfrac{x\cos(kx)}{k} + C$)

(c) $\int x \cos(kx)\,dx$, $k = 1, 2, 3,$ .... (resp.: $\dfrac{\cos(kx)}{k^2} + \dfrac{x\operatorname{sen}(kx)}{k} + C$)

(d) $\int \operatorname{arcsen} x dx$ .... (resp.: $x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C$)

(e) $\int x^n \ln x dx$ .... (resp.: $\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x - \frac{1}{n+1}) + C$)

(f) $\int x \arctan x dx$ .... (resp.: $\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + C$)

(g) $\int \ln(x^2+1)dx$ .... (resp.: $x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + C$)

(h) $\int \dfrac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ .... (resp.: $2\sqrt{x}\operatorname{arcsen}\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C$)

(i) $\int \dfrac{x \arctan x dx}{(x^2+1)^2}$ .... (resp.: $\dfrac{x - (1-x^2)\operatorname{arctg} x}{4(1+x^2)} + C$)

(j) $\int x \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right) dx$ .... (resp.: $\frac{1}{2}\left[x^2 \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1}\right] + C$)

(k) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen} x dx}{x^2}$ .... (resp.: $\ln\left|\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| - \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{x} + C$)

(l) $\displaystyle\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) dx$ .... (resp.: $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + C$)

2. Calcule as seguintes integrais definidas.

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x dx$ .... (resp.: $e-2$)

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \cos(kx)\, dx, \quad k = 1, 2, 3,$ .... (resp.: $\dfrac{2\pi(-1)^k}{k^2}$)

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2 \operatorname{sen}(kx)\, dx, \quad k = 1, 2, 3,$ .... (resp.: $\dfrac{-4\pi^2}{k}$)

7.6 Decomposição em Frações Parciais

Antes da descrição do método, deixe-nos considerar algumas integrais básicas, já calculadas por substituição, que normalmente aparecem ao aplicarmos o método.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{ax+b} = (\text{usar } u = ax+b \text{ e } du = adx) = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$ $\qquad (a \neq 0)$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax+b)^p} = (\text{usar } u = ax+b \text{ e } du = adx) = \frac{1}{a}\int u^{-p}du = \frac{(ax+b)^{1-p}}{a(1-p)} + C.$ $\qquad (a \neq 0 \text{ e } p \neq 1)$

3. $\displaystyle\int \frac{xdx}{ax^2+b} = (\text{usar } u = ax^2+b \text{ e } du = 2axdx) = \frac{1}{2a}\ln\left|ax^2+b\right| + C.$ $\qquad (a \neq 0)$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+b^2} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{1+(x/b)^2} = (\text{usar } u = x/b) = \frac{1}{b}\arctan(x/b) + C.$ $\qquad (b \neq 0)$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dx}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}} = (\text{usar } u = x+b/2a) = \int \frac{du}{au^2 - \frac{\Delta}{4a}}.$ $\qquad (a \neq 0 \text{ e } \Delta < 0)$

A última integral em (5) é do tipo $\displaystyle\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + C$, como mostrado no Exemplo 7.6.1.

EXEMPLO 7.6.1 *Calcular a integral indefinida:*

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5}.$$

SOLUÇÃO Temos $a = 1,\ b = 4,\ c = 6$ e $\Delta = b^2 - 4ac = -8 < 0$ e completando o quadrado no trinômio do denominador, encontramos $x^2 + 4x + 6 = (x-2)^2 + 2$ e temos:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 + \frac{(x-2)^2}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

Agora, considerando $t = (x-2)/\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}dt = dx$, resulta:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{2}dt}{1 + t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan t + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \left(\frac{x-2}{\sqrt{2}} \right) + C.$$

O método de decompoição em Frações Parciais é direcionado ao cálculo de integrais de funções racionais, isto é, integrandos do tipo $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, sendo $P(x)$ e $Q(x)$ dois polinômios. Vamos tratar o caso em que o grau do numerador $P(x)$ é menor do que o grau do denominador $Q(x)$; o outro caso se reduz a este, após a divisão de $P(x)$ por $Q(x)$.

O método se inicia decompondo o denominar $Q(x)$ em produtos de fatores irredutíveis do 1º grau $(x-a)^n$ e/ou do 2º grau $\left(ax^2 + bx + c\right)^m$, com $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. No caso em que $\Delta \geq 0$ o trinômio $ax^2 + bx + c$ se expressa como produto $(x - x_1)(x - x_2)$, sendo x_1 e x_2 as raízes reais. O fator $(x-a)^n$ produz as frações parciais:

$$\frac{A_1}{x-a}, \ \frac{A_2}{(x-a)^2}, \ \frac{A_3}{(x-a)^3}, \ldots, \frac{A_n}{(x-a)^n}, \tag{7.25}$$

enquanto o fator irredutível $\left(ax^2 + bx + c\right)^m$ produz as frações parciais:

$$\frac{B_1 x + C_1}{ax^2 + bx + c}, \ \frac{B_2 x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2}, \ \frac{B_3 x + C_3}{(ax^2 + bx + c)^3}, \ldots, \frac{B_m x + C_m}{(ax^2 + bx + c)^m} \tag{7.26}$$

As integrais das frações parciais são calculadas com auxílio das integrais básicas introduzidas no início desta seção. Na sequência veremos alguns exemplos para ilustrar o método.

EXEMPLO 7.6.2 *Calcular a integral*:

$$\int \frac{xdx}{x^2 - 3x + 2}.$$

SOLUÇÃO Temos $P(x) = x$, de grau 1, e $Q(x) = x^2 - 3x + 2$, de grau 2, com $\Delta = 1$ e raízes $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ e, assim:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)}$$

e a decomposição:

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x - 2A - B}{(x-1)(x-2)}$$

nos conduz à identidade polinomial $(A+B)x - 2A - B = x$ e igualando os coeficientes, chegamos ao sistema linear:

$$\left|\begin{array}{l} A+B=1 \\ 2A+B=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow A=-1 \text{ e } B=2.$$

Logo, se $x \neq 1$ e $x \neq 2$, teremos:

$$\int \frac{xdx}{x^2-3x+2} = \int \frac{-1dx}{x-1} + \int \frac{2dx}{x-2} = -\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + C.$$

EXEMPLO 7.6.3 *O polinômio $Q(x) = x^2+2x+2$ é irredutível (não tem raiz real) e pode ser expresso como $Q(x) = (x+1)^2+1$ e, portanto:*

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-3)\,dx}{x^2+2x+2} &= \int \frac{(x-3)\,dx}{(x+1)^2+1} = (\textit{usar } t = x+1) = \int \frac{(t+4)\,dt}{1+t^2} \\ &= \int \frac{tdt}{1+t^2} + 4\int \frac{dt}{1+t^2} = \tfrac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right) + 4\arctan t + C \end{aligned}$$

e retornado com a variável x, encontramos:

$$\int \frac{(x-3)\,dx}{x^2+2x+2} = \tfrac{1}{2}\ln\left[1+(x+1)^2\right] + 4\arctan(x+1) + C.$$

EXEMPLO 7.6.4 *Calcular a integral definida:*

$$\int_1^2 \frac{\left(x^2+2\right)dx}{x^3+x}.$$

SOLUÇÃO Fatorando o denominador como $x\left(x^2+1\right)$, obtemos a decomposição em frações parciais:

$$\frac{x^2+2}{x^3+x} = \frac{x^2+2}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x\left(x^2+1\right)}$$

e igualando os numeradores, obtemos $x^2+2 = (A+B)x^2+Cx+A$ e daí segue $A=2,\ B=-1$ e $C=0$. Assim:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\left(x^2+2\right)dx}{x^3+x} &= \int_1^2 \frac{2dx}{x} + \int_1^2 \frac{-xdx}{x^2+1} = 2\Big[\ln x\Big]_1^2 - \frac{1}{2}\Big[\ln\left(x^2+1\right)\Big]_1^2 \\ &= 2\ln 2 - \ln\left(\sqrt{5/2}\right) = \ln\left(8/\sqrt{10}\right). \end{aligned}$$

EXEMPLO 7.6.5 *Calcular a integral indefinida:*

$$\int \frac{x^3dx}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

SOLUÇÃO Considerando a decomposiçao em frações parciais:

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax^3+Bx^2+(A+C)x+B+D}{(x^2+1)^2}$$

encontramos $x^3 = Ax^3+Bx^2+(A+C)x+B+D$ e daí resulta $A=1,\ B=0,\ C=-1$ e $D=0$. Assim, com a substituição $t = x^2+1$, obtemos:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3dx}{(x^2+1)^2} &= \int \frac{xdx}{x^2+1} + \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln|t| + \frac{1}{t^2}\right] + C = \frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{x^2+1}\right] + C.\end{aligned}$$

EXEMPLO 7.6.6 *Neste exemplo, abordaremos o caso em o grau do numerador é maior do que o grau do denominador. Calcular a integral*:

$$\int \frac{\left(x^3-2x\right)dx}{x^2+x+1}.$$

SOLUÇÃO Temos $P(x) = x^3-2x$, de grau 3, e $Q(x) = x^2+x+1$, de grau 2. Efetuando a divisão de $P(x)$ por $Q(x)$, obtemos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

onde $q(x) = x-1$ é o quociente e $R(x) = -2x+1$ é o resto da divisão. Assim:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx. \tag{7.27}$$

Ressaltamos que na última integral em (7.27) o numerador $R(x)$ tem grau menor do que o denominador $Q(x)$ e o cálculo da integral se reduz ao caso anterior.

$$\begin{aligned}\int \frac{\left(x^3-2x\right)dx}{x^2+x+1} &= \int (x-1)\,dx + \int \frac{(-2x+1)\,dx}{x^2+x+1} = \frac{x^2}{2} - x - \int \frac{2x+1-2}{x^2+x+1}dx \\ &= \frac{x^2}{2} - x - \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} + 2\int \frac{dx}{x^2+x+1} \\ &= \frac{x^2}{2} - x - \ln\left(x^2+x+1\right) + 2\int \frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4}.\end{aligned}$$

A última integral pode ser calculada com a substituição $t = x+1/2$ e, finalmente, encontramos:

$$\int \frac{\left(x^3-2x\right)dx}{x^2+x+1} = \frac{x^2}{2} - x - \ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

EXEMPLO 7.6.7 *Calcular as integrais*: **(a)** $\int \sec\theta d\theta$ **(b)** $\int \sec^3\theta d\theta$

SOLUÇÃO No caso (a), iniciamos com a substituição $t = \operatorname{sen}\theta$ e em seguida fazemos a decomposição em frações parciais. Temos:

$$\begin{aligned}\int \sec\theta d\theta &= \int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \int \frac{\cos\theta d\theta}{\cos^2\theta} = \int \frac{\cos\theta d\theta}{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \int \frac{dt}{1-t^2} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C.\end{aligned}$$

No caso (b), integramos por partes, notando que $d(\tan\theta) = \sec^2\theta d\theta$, e obtemos:

$$\begin{aligned}\int \sec^3\theta d\theta &= \int \sec\theta d(\tan\theta) = \sec\theta\tan\theta - \int \tan^2\theta\sec\theta d\theta \\ &= \sec\theta\tan\theta - \int \left(\sec^2\theta - 1\right)\sec\theta d\theta = \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta d\theta - \int \sec^3\theta d\theta\end{aligned}$$

e daí resulta:

$$\int \sec^3\theta d\theta = \frac{1}{2}\Big[\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|\Big] + C.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 7.6 (click aqui e veja a lista completa)

1. Integrais por Decomposição em Frações Parciais.

(a) $\displaystyle\int \frac{(2x-1)}{(x-1)(x-2)}dx$ .... (resp.: $-\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C$)

(b) $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$ .... (resp.: $-\frac{1}{8}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\ln|x+3| - \frac{5}{8}\ln|x+5| + C$)

(c) $\displaystyle\int \frac{\left(x^5+x^4-8\right)dx}{x^3-4x}$ .... (resp.: $4x + 2\ln x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 5\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + C$)

(d) $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{(x^2-1)(x+2)}$ .... (resp.: $\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x+1}\right| + \frac{16}{3}\ln|x+2| + C$)

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$ .... (resp.: $\displaystyle\frac{1}{x-1} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$)

(f) $\displaystyle\int \frac{(x-8)dx}{x^3-4x^2+4x}$ .... (resp.: $\displaystyle -2\ln|x| + \frac{3}{x-2} + 2\ln|x-2| + C$)

(g) $\displaystyle\int \frac{\left(x^2+2x+1\right)dx}{\left(1+x^2\right)^2}$ .... (resp.: $\displaystyle -\frac{1}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x + C$)

(h) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$ .... (resp.: $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left[\frac{1}{2}(x+1)\right] + C$)

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2-2x+4}$ .... (resp.: $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3x-1}{\sqrt{11}}\right) + C$)

(j) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$ .... (resp.: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+C$)

(k) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}$ .... (resp.: $\operatorname{arctg}(2x-1)+C$)

(l) $\displaystyle\int \frac{(6x-7)\,dx}{3x^2-7x+11}$ .... (resp.: $\ln|3x^2-7x+11|+C$)

(m) $\displaystyle\int \frac{(7x+1)\,dx}{6x^2+x-1}$ .... (resp.: $\frac{1}{2}\ln|2x+1|+\frac{2}{3}\ln|3x-1|+C$)

RESPOSTAS & SUGESTÕES

ESCREVENDO PARA APRENDER 7.1

1. Recorde-se que $F(x)$ é primitiva de $f(x)$ quando F for derivável e $F'(x)=f(x)$, em cada x.

   (a) $F(x)=\frac{4}{5}x^{5/4}+\frac{6}{5}$ (b) $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{x}+\frac{2}{3}$ (c) $F(x)=\ln(x+1)+2.$

2. $f(x)=e^{\frac{1}{2}(x^2-1)}=\exp\left(\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\right).$

3. Usando as regras de derivação e considerando que $f'=g$ e $g'=-f$, encontramos:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2[f-\operatorname{sen}x]\left[f'-\cos x\right]+2[g-\cos x]\left[g'+\operatorname{sen}x\right] \\ &= 2[f-\operatorname{sen}x][g-\cos x]+2[g-\cos x][-f+\operatorname{sen}x]=0 \end{aligned}$$

   e, portanto, $h(x)$ é constante. Como $h(0)=0$, segue que $h(x)=0$ e temos o resultado.

4. Antes de iniciar, não esqueça de lembrar as regras básicas de integração.

   (a) $\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{2}x^2+C.$

   (b) $-\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{x}+\ln x+C.$

   (c) $-2\cos x+\dfrac{1}{4x^4}+C.$

   (d) $\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{2x^3}{3}+x+C.$

   (e) $\operatorname{arctg}x+C.$

   (f) $\operatorname{tg}x-x-\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}+C.$

   (g) $\frac{2}{3}x^{3/2}+\operatorname{tg}x+C.$

(h) $\frac{2}{9}x^{9/2} + C.$

(i) $\dfrac{2^x}{\ln 2} + \mathrm{e}^{x+1} + C.$

(j) $2x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + C.$

(k) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}(4x+2) + C.$

(l) $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + C$

(m) $\frac{1}{2}\left(5x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + C$

(n) $\frac{1}{2}\sec 2x + C$

(o) $x + \ln|x| + C$

(p) $x + 1 - \ln|x+1| + C.$

5. Com a primitiva $F(x) = \frac{1}{p}\exp(x^p)$, $p \neq 0$, encontramos:

(a) $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$ (b) $2e^{\sqrt{x}} + C$ $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$

6. Integrando duas vezes a função $f(x)$, encontramos

$$f(x) = \frac{x^4}{12} + e^x + kx + C$$

e, substituindo os dados $f(0) = 2$ e $f'(0) = 1$, obtemos $k = 0$ e $C = 1$. Assim, $f(x) = \dfrac{x^4}{12} + e^x + 1.$

7. Recorde-se das regras básicas de integração e de algumas identidades trigonométricas.

(a) 0 (b) 0 (c) $\pi/4$, se $k = 0$, e $\dfrac{(-1)^{n-1}}{4n-2}$, se $k = 2n-1.$

8. Sendo a declividade no ponto (x, y) igual a $2x + 1$, então:

$$y' = 2x + 1 \Rightarrow y = x^2 + x + k$$

e, considerando que $y(-3) = 0$, encontramos $y = x^2 + x - 6$, que é a equação da curva.

9. Se $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, então $\varphi(x) = F(\beta(x)) - F(\alpha(x))$ e, usando a Regra da Cadeia e o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos o resultado.

10. (a) $\sqrt[3]{1 + x^4}$ (b) $[\ln(\operatorname{sen} x)]^5 \cos x + [\ln(\cos x)]^5 \operatorname{sen} x$ (c) $\mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^{2x}) - 2x\cos(x^2-1)^2.$

11. (a) $1/3$ (b) 5 (c) 4 (d) 4 (e) 43 (f) $-\pi^2$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 7.2

1. (a) 0 (b) 0 (c) $1/2$.
2. Fazer em Sala de Aula
3. Fazer em Sala de Aula
4. Fazer em Sala de Aula
5. Fazer em Sala de Aula
6. (a) $\frac{2}{15}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{5}{3}$ (d) $16\sqrt{2}/3$ (e) $\sqrt{2}-1$ (f) $\frac{5}{3}$ (g) $\frac{1}{3}$ (h) $\frac{10}{3}$ (i) 8 (j) $\frac{64}{3}$.
7. (a) $16/3$ (b) 9 (c) $\ln 2$ (d) $1/3$ (e) $1/2$.
8. $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = \frac{3}{2}$; $A = 73/6$. A integral de uma função contínua por partes $y = f(x)$, no intervalo $[a,b]$, coincide com a área entre o gráfico de f e o eixo x, no caso em que a função é não negativa no intervalo.
9. (a) 1 (b) 1 (c) $5/2$ (d) $32/3$.
10. Com a mudança $x = -t$ e observando que f é uma função par, encontramos:
$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(t)\,dt \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$
Na figura abaixo ilustramos a situação geométrica em que A representa o valor da integral no intervalo $[0,a]$ A Figura 7.16 mostra uma função par e a Figura 7.17 uma função ímpar.
11. (a) $g(0) = 0$, $g(1) = 2$, $g(2) = 5$, $g(3) = 7$ e $g(6) = 3$ (b) em $(0,3)$ (c) em $x = 3$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 7.3

1. Recorde-se que a integral imprópria *convergir* significa que ela tem um valor numérico. Do contrário, ela denomina-se *divergente*.

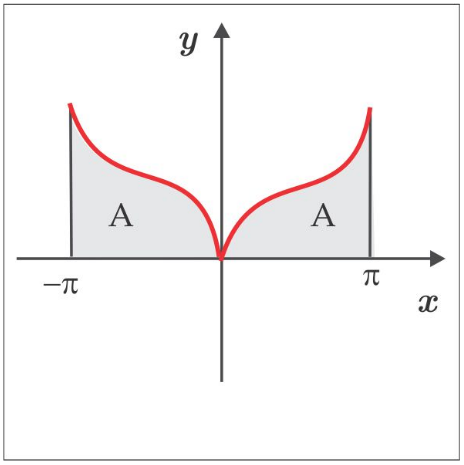


Figura 7.16: Função Par.

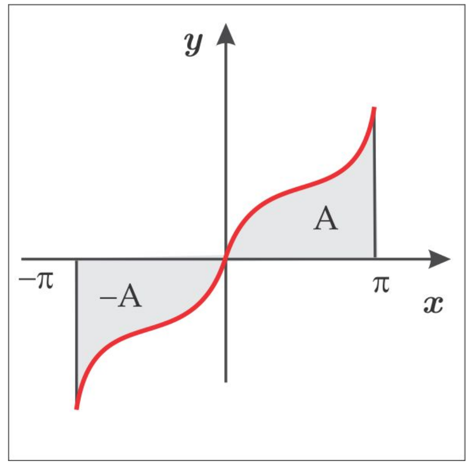


Figura 7.17: Função Ímpar.

(a) Temos

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{|x|}} &= \lim_{a\to 0^+}\int_a^1\frac{dx}{\sqrt{x}}+\lim_{b\to 0^-}\int_{-1}^{b}\frac{dx}{\sqrt{-x}}\\ &= \lim_{a\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_a^1+\lim_{b\to 0^-}\left[-2\sqrt{-x}\right]_{-1}^{b}2+2=4.\end{aligned}$$

Logo, a integral é convergente e tem valor 4.

(b) Divergente **(c)** Divergente.

(d) A integral é convergente, porque

$$\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}(\arctan b-\arctan 0)=\pi/2.$$

(e) Considerando a primitiva $F(x)=-\frac{1}{4}\exp\left(-x^4\right)$, determinada no Exercício 5 da seção 7.1, com $p=4$, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^3\exp\left(-x^4\right)dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b x^3\exp\left(-x^4\right)dx=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{4}\exp\left(-x^4\right)\right]_0^b\\ &= -\frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\left[\exp\left(-b^4\right)-1\right]=1/4.\end{aligned}$$

A integral é convergente e tem valor 1/4.

2. Divergente.

3. Temos:

$$\begin{aligned}\int_1^5 \frac{dx}{(5-x)^2} &= \lim_{b\to 5^-} \int_1^b \frac{dx}{(5-x)^2} = \lim_{b\to 5^-} \left[\frac{1}{5-x}\right]_1^b \\ &= \lim_{b\to 5^-} \left(\frac{1}{5-b} - \frac{1}{4}\right) = +\infty.\end{aligned}$$

Assim, a integral é divergente (não tem valor numérico).

Introdução

Neste capítulo faremos algumas aplicações da integral, tais como:

(1) Área de uma região plana, nas formas cartesiana e polar.

(2) Comprimento de curvas nas formas cartesiana, paramétrica e polar.

(3) Volume e área de uma superfície de revolução.

Ao definir a integral como área tínhamos em mente uma primeira aplicação da integral: o cálculo de áreas planas. Suponhamos que certa região D do plano xy seja delimitada pelo eixo Ox, pelo gráfico de uma função contínua e não negativa $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, e pelas retas $x = a$ e $x = b$, como ilustra a Figura 8.43. A área da região D é denotada por $A(D)$ e calculada com auxilio da fórmula:

$$\boxed{\mathrm{A}(D) = \int_a^b f(x)dx.}$$

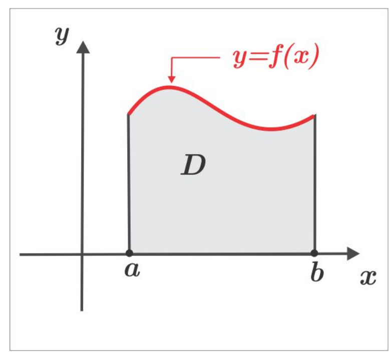


Figura 8.1: Área da região D

8.1 Comprimento de Curvas

Consideremos uma curva γ no plano xy, descrita por $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, sendo f uma função contínua juntamente com a derivada primeira $f'(x)$. Na Figura 8.2 ilustramos uma tal curva γ e a porção elementar (infinitesimal) ds.

O comprimento elementar ds é aproximado, via Teorema de Pitágoras, por:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{8.1}$$

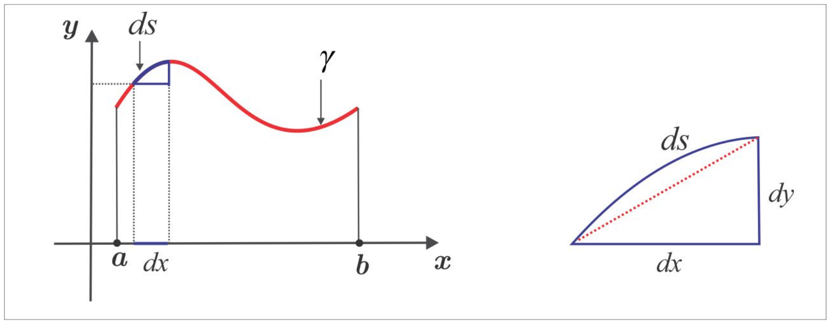


Figura 8.2: O comprimento Elementar $d\gamma$.

e obtemos, na forma cartesiana, a seguinte expressão para o comprimento da curva γ:

$$\boxed{\mathrm{L}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.} \tag{8.2}$$

Na forma paramétrica a curva γ é descrita por um par de equações:

$$\left| \begin{array}{l} x = x\,(t) \\ y = y\,(t)\,, \quad t_1 \leq t \leq t_2, \end{array} \right. \tag{8.3}$$

sendo $x\,(t)$ e $y\,(t)$, juntamente com as derivadas $x'\,(t)$ e $y'\,(t)$, contínuas no intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$. Considerando que:

$$dx = x'\,(t)\, dt \quad \text{e} \quad dy = y'\,(t)\, dt$$

encontramos:

$$d\gamma = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{x'\,(t)^2 + y'\,(t)^2}\ dt$$

e, assim, obtemos a seguinte expressão para o comprimento da curva γ, agora na forma paramétrica:

$$\boxed{L(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.} \tag{8.4}$$

EXEMPLO 8.1.1 *Como ilustração, vamos calcular o comprimento de uma circunferência de raio R.*

SOLUÇÃO Não há perda de generalidade em considerar a circunferência de centro na origem, como ilustra a Figura 8.3. A parte da circunferência no 1º quadrante é descrita por $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, com $0 \leq x \leq R$, e usando (8.2), obtemos:

$$L\,(\gamma) = 4 \int_0^R \frac{R dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

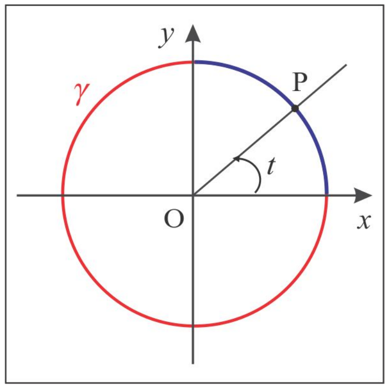


Figura 8.3: Curva $x^2 + y^2 = R^2$.

No cálculo da integral usamos a substituição $x = R \operatorname{sen} \theta$ e encontramos:

$$L(\gamma) = 4R \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}} = 4R \int_0^{\pi/2} d\theta = 2\pi R.$$

O cálculo torna-se mais simples se usarmos a forma paramétrica. De fato, se o parâmetro t representa o ângulo orientado do raio OP com o eixo Ox, como na Figura 8.3, obtemos a parametrização:

$$\left| \begin{array}{l} x = R\cos t \\ y = R \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi, \end{array} \right.$$

e usando (8.4), encontramos:

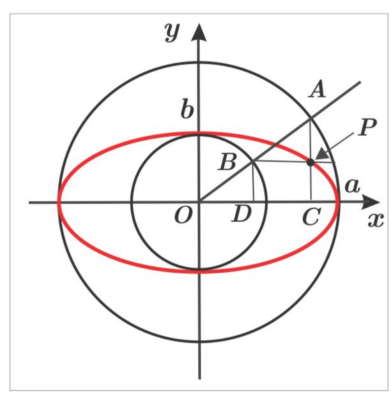
$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \operatorname{sen} t)^2 + (R\cos t)^2} dt = R \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R.$$

EXEMPLO 8.1.2 (Parametrizando a Elipse e a Hipérbole) *O mesmo parâmetro t usado na parametrização da circunferência pode ser usado na elipse e na hipérbole.*

(i) Parametrizando a Elipse: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Observando a figura ao lado, notamos que as coordenadas do ponto $P(x, y)$ da elipse são: $x = OC$ e $y = DB$ e se t representa o ângulo entre o eixo x e o eixo OA, obtemos a seguinte parametrização para a elipse:

$$\boxed{x = a\cos t, \quad y = b \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi.}$$



(ii) Parametrizando a Hipérbole: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

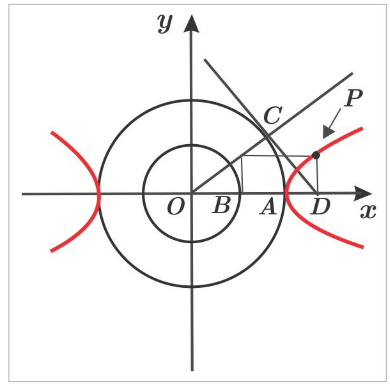
Na figura ao lado, ilustramos a hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

onde $OB = b$ e$OA = a$ *e temos a seguinte parametrização:*

$$\boxed{x = a\sec t, \quad y = b\,\tan t, \quad 0 \le t \le 2\pi,}$$

onde t *representa o ângulo entre o eixo* x *e o eixo* OC.



EXEMPLO 8.1.3 *Qual o comprimento do arco da parábola* $y = x^2$, *entre* $x = 0$ *e* $x = 1$?

SOLUÇÃO Um cálculo direto nos dá:

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

e com a substituição $2x = \tan\theta$, resulta:

$$L(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^\alpha \sqrt{1 + \tan^2\theta}\sec^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\alpha \sec^3\theta d\theta$$

onde $\tan\alpha = 2$. No Exemplo 7.6.7, calculamos a integral de $\sec^3\theta$ e usando o resultado, obtemos:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \frac{1}{4}\Big[\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|\Big]_0^\alpha \\ &= \frac{1}{4}\Big[\sec\alpha\tan\alpha + \ln|\sec\alpha + \tan\alpha|\Big] = \frac{1}{4}\left[2\sqrt{5} + \ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right]. \end{aligned}$$

EXEMPLO 8.1.4 *Calcular o comprimento do arco da parábola semicúbica* $y^2 = x^3$, *entre* $y = -1$ *e* $y = 8$, *ilustrada na Figura 8.4.*

Com a parametrizção $x = t^2,\ y = t^3,\ -1 \le t \le 2$, *encontramos:*

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_{-1}^2 \sqrt{4t^2 + 9t^4}\, dt = \int_{-1}^2 |t|\sqrt{4 + 9t^2}\, dt \\ &= -\int_{-1}^0 t\sqrt{4 + 9t^2}\, dt + \int_0^2 t\sqrt{4 + 9t^2}\, dt \end{aligned}$$

e usando a substituição $u = 4 + 9t^2$, *obtemos* $du = 18tdt$ *e assim:*

$$L(\gamma) = -\frac{1}{18}\int_{13}^4 \sqrt{u}\, du + \frac{1}{18}\int_4^{40} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{27}\left(80\sqrt{10} + 13\sqrt{13} - 16\right) \simeq 10.52.$$

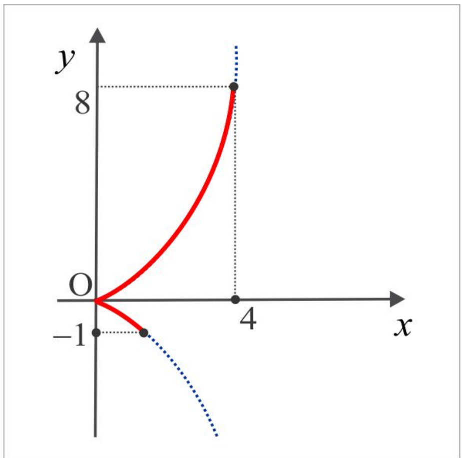


Figura 8.4: Parábola $y^2 = x^3$.

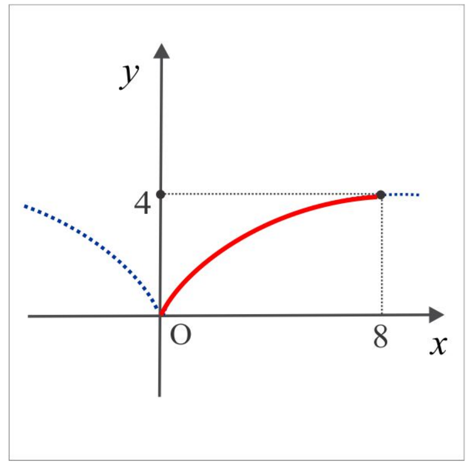


Figura 8.5: Parábola $y^3 = x^2$.

EXEMPLO 8.1.5 *Em alguns casos, o cálculo do comprimento de uma curva torna-se mais simples quando ela é descrita sob a forma* $x = g(y)$, $c \le y \le d$. *A parábola semicúbica* $\gamma : y^3 = x^2$, $0 \le x \le 8$, *ilustrada na Figura 8.5, pode ser vista sob a forma* $x = g(y) = y^{3/2}$, $0 \le y \le 4$, *e o comprimento é dado por*:

$$L(\gamma) = \int_0^4 \sqrt{1 + g'(y)^2}\, dy = \int_0^4 \sqrt{1 + 9y/4}\, dy.$$

Com a substituição $u = 1 + 9y/4$, *chegamos a*:

$$L(\gamma) = \frac{4}{9}\int_1^{10} \sqrt{u}\, du = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right).$$

8.1.1 Dedução das Fórmulas do Comprimento

A cuva γ ilustrada na Figura 8.6 representa o gráfico de uma função contínua $y = f(x)$, $a \le x \le b$, com derivada $f'(x)$ contínua.

Dada uma partição $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ do intervalo $[a, b]$, o comprimento da curva γ é aproximado pelo comprimento da poligonal que liga os pontos:

$$A(a, f(a)),\ A_1(x_1, f(x_1)),\ A_2(x_2, f(x_2)),\ A_3(x_3, f(x_3)), \ldots, A_{n-1}(x_{n-1}, f(x_{n-1})),\ B(b, f(b))$$

e o segmento genérico $A_{k-1}A_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, tem comprimento:

$$\begin{aligned} |A_{k-1}A_k| &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + f'(c_k)^2 (x_k - x_{k-1})^2} = (x_k - x_{k-1})\sqrt{1 + f'(c_k)^2} \end{aligned}$$

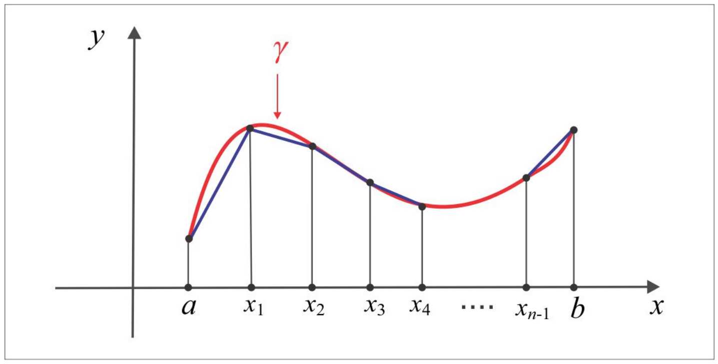


Figura 8.6: Comprimento do arco γ.

onde cada c_k, entre x_{k-1} e x_k, é determinado pelo Teorema do Valor Médio 6.2.2. O comprimento da poligonal que aproxima a curva γ é, portanto:

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} |A_{k-1}A_k| = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sqrt{1 + f'(c_k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'(c_k)^2}\ \Delta x_k$$

com $\Delta x_k = t_k - t_{k-1}$, e fazendo $n \to \infty$, chegamos ao comprimento da curva γ:

$$L(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |A_{k-1}A_k| = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx.$$

Na forma parametrizada, a curva γ é descrita por um par de equações a um parâmetro t :

$$\left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t), \quad c \le t \le d \end{array} \right.$$

e o ponto genérico A_k da poligonal tem coordenadas $x(t_k)$ e $y(t_k)$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$. Mais uma vez usamos o Teorema do Valor Médio e encontramos:

$$\begin{aligned} |A_{k-1}A_k| &= \sqrt{\left[x(t_k) - x(t_{k-1})\right]^2 + \left[y(t_k) - y(t_{k-1})\right]^2} \\ &= (t_k - t_{k-1}) \sqrt{x'(c_k)^2 - y'(d_k)^2} = \sqrt{x'(c_k)^2 - y'(d_k)^2}\ \Delta t \end{aligned}$$

onde c_k e d_k estão entre t_{k-1} e t_k, e, sendo assim:

$$L(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |A_{k-1}A_k| = \int_c^d \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 8.1 (click aqui e veja a lista completa)

1. Calcule a área de um círculo de raio R e da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$ (resp.: πR^2 e πab)

2. Calcule a área da região delimitada pelo eixo x, pelas retas $x = \pm B$, $B > 0$, e pelo gráfico da função $y = x^2 \exp\left(-\left|x^3\right|\right)$. Verifique que a área limite, com $B \to \infty$, é $2/3$. (resp.: $\frac{2}{3}(1 - e^{-B^2})$)

3. Considere $B > 2$ e calcule a área sob a curva $y = x^{-1}(\ln x)^{-2}$, entre as retas $x = 2$ e $x = B$. Esta área tem um limite, com $B \to \infty$? (resp.: $1/\ln 2 - 1/\ln B$, com área limite $1/\ln 2$)

4. Em cada caso, calcule o comprimento do arco indicado.

   (a) $y = \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{1}{x}, \quad 1 \le x \le 2.$ (resp.: $13/12$)

   (b) $y = \frac{2}{3}\left(1 + x^2\right)^{3/2}, \quad 0 \le x \le 3.$ (resp.: 21)

   (d) $x = \dfrac{y^3}{2} + \dfrac{1}{6y}, \quad 1 \le y \le 3.$ (resp.: $\sqrt{6}(2 + \ln 3)$)

   (e) $y = \sqrt{x}\,(1 - x/3), \quad 0 \le x \le 3.$ (resp.: $2\sqrt{3}$)

   (f) $8x^2 = 27y^3, \quad 1 \le x \le 8.$ (resp.: $62/3$)

   (g) $y = x^{3/2}, \quad 1 \le x \le 4.$ (resp.: $62/5$)

   (h) $y + \dfrac{1}{4x} + \dfrac{x^3}{3} = 0, \quad 2 \le x \le 3.$ (resp.: $53/6$)

   (i) $(y + 1)^2 = (x - 4)^3, \quad 5 \le x \le 8.$ (resp.: $80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}$)

   (j) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{2x^{3/2}}{3}, \quad 0 \le x \le 1.$ (resp.: $\frac{1}{6}(30\sqrt{3} - 7)$)

5. Calcule o comprimento da *hipociclóide* de equação $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. (resp.: $6a$)

6. Calcule a distância percorrida por uma partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$, se sua posição $P(x, y)$ no instante t vem dada por: $x = \frac{1}{2}t^2$ e $y = \frac{1}{3}(2t + 1)^{3/2}$. (resp.: 12)

7. Em cada caso, calcule o comprimento do arco γ indicado:

   (a) $\gamma : x = t^3,\ y = t^2, \quad -1 \le t \le 3.$ (resp.: $\frac{1}{27}[(85)^{3/2} - (13)^{3/2}]$)

   (b) $\gamma : x = e^t \cos t,\ y = e^t \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 1.$ (resp.: $\sqrt{2}(e - 1)$)

   (c) $\gamma : x = 2(1 - \operatorname{sen} t),\ y = 2(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le \pi.$ (resp.: 2π)

   (d) $\gamma : x = t \cos t,\ y = t \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi/4.$ (resp.: $\frac{\pi}{2}\sqrt{1 + \pi^2}$)

   (e) $\gamma : x = \cos(2t),\ y = \operatorname{sen}^2 t, \quad 0 \le t \le \pi.$ (resp.: $2\sqrt{5}]$)

   (f) $\gamma : x = \frac{1}{2}t^2 + t,\ y = \frac{1}{2}t^2 - t, \quad 0 \le t \le 1.$ (resp.: $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(\sqrt{2} - 1)$)

8. Seja γ a curva descrita por: $x = t^3 - 3t,\ y = t^3 - 5t - 1,\ t \in \mathbb{R}$. Verifique que $r : 7x - 9y = 41$ é a reta tangente à curva γ no ponto correspondente a $t = 2$. Note que nos pontos correspondentes a $t = \pm 1$ a reta tangente é vertical e será horizontal nos pontos correspondentes a $t = \pm\sqrt{5/3}$.

8.2 Comprimento & Área na Forma Polar

Com origem num ponto O, denominado *Pólo*, consideremos um eixo, denominado *Eixo Polar*. Um ponto $P(x, y)$ do plano xy estará determinado quando são conhecidos o ângulo θ, entre o eixo polar e o raio vetor OP, e o comprimento r desse raio vetor.

Normalmente considera-se o eixo polar coincidindo com o eixo cartesiano Ox e, dessa forma, obtemos as relações entre as variáveis cartesianas x e y e as variáveis polares r e θ:

$$\left| \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left| \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \end{array} \right. \tag{8.5}$$

As quantidades r e θ são as *coordenadas polares* do ponto P. É claro que as coordenadas (r, θ) e $(r, \theta + 2k\pi)$, $k \in Z$, representam o mesmo ponto e convencionaremos que $r \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

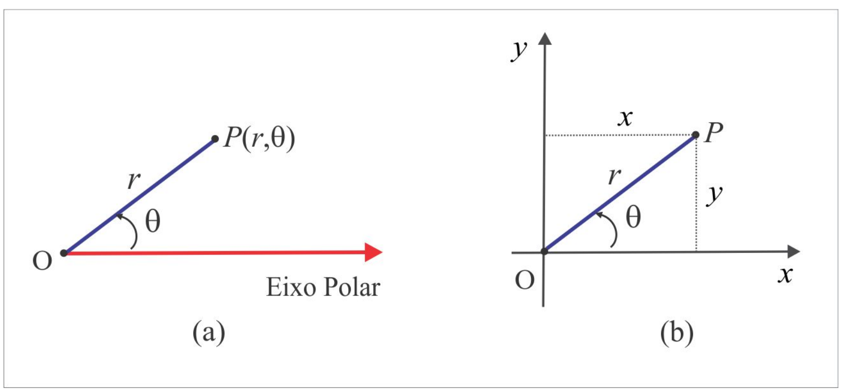


Figura 8.7: Coordenadas Polares r e θ.

Alguns autores admitem a possibilidade $r < 0$ e, nesse caso, o ponto (r, θ) é localizado na direção contrária ao eixo polar, como ilustra a Figura 8.8 onde o ponto $Q(r, \theta + \pi)$ é identificado por $Q(-r, \theta)$.

EXEMPLO 8.2.1 *O ponto P de coordenadas polares $r = 1$ e $\theta = \pi/2$ tem coordenadas cartesianas*

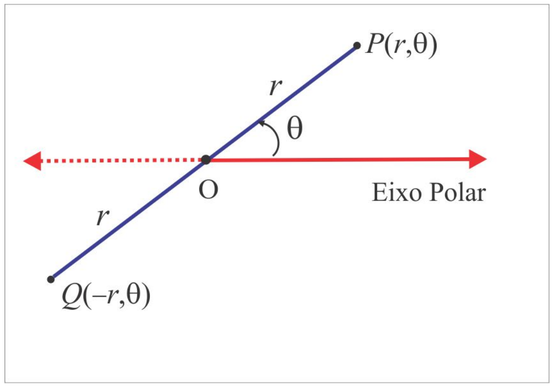


Figura 8.8: Os pontos $(\pm r, \theta)$.

$x = 0$ *e* $y = 1$. *Já as coordenadas polares do ponto* $Q\,(2,2)$ *são*:

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \quad e \quad \theta = \arctan 1 = \pi/4.$$

8.2.1 Lugar Geométrico (LG) na Forma Polar

■ **A LINHA RETA:** Fixado θ_0 no intervalo $[0, 2\pi]$, a equação polar $\theta = \theta_0$ representa a reta que passa pelo pólo, formando um ângulo de θ_0 rad com o eixo polar (o eixo Ox). Em coordenadas cartesianas a equação deste LG é $y = (\tan \theta_0)\, x$.

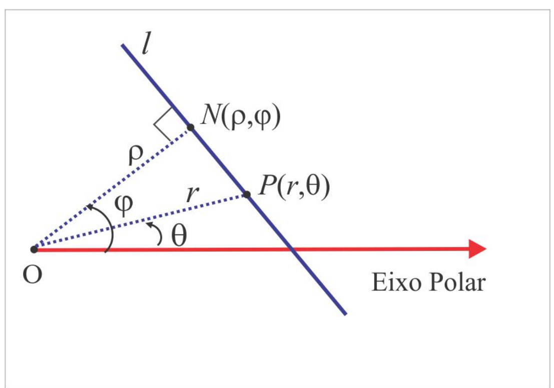


Figura 8.9: A linha Reta.

Dada uma reta l que não passa no pólo, seja $N\,(\rho, \varphi)$ o pé da perpendicular traçada da origem à reta l, como ilustra a Figura 8.9. Um ponto $P\,(r, \theta)$ está sobre a reta l se, e somente se, $r \cos(\varphi - \theta) = \rho$ e em símbolos, temos:

$$P\,(r,\theta) \in l \Leftrightarrow r = \frac{\rho}{A \cos \theta + B \operatorname{sen} \theta}, \tag{8.6}$$

onde $A = \cos\varphi$ e $B = \operatorname{sen}\varphi$. Temos os seguintes casos particulares ilustrados na Figura 8.10.

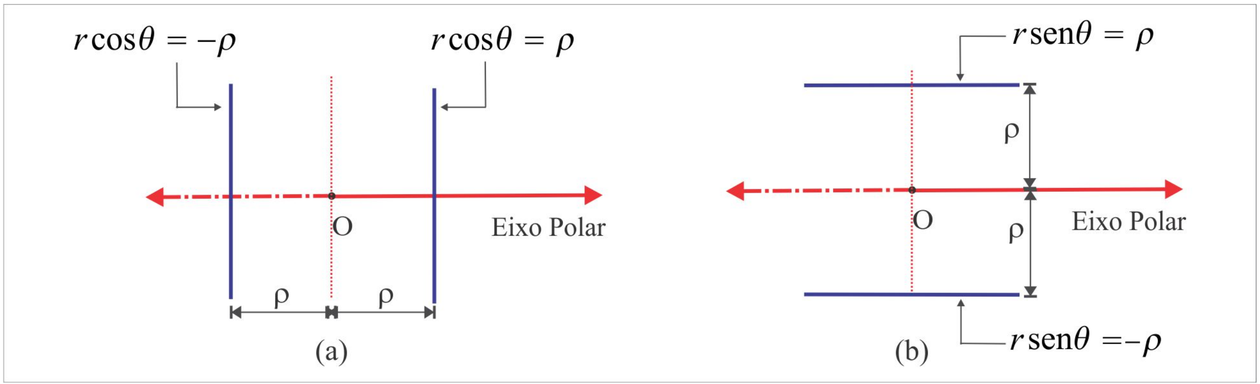


Figura 8.10: (a) Reta Vertical | (b) Reta Horizontal.

(i) Reta Vertical: Se $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$ e $\rho > 0$, a equação (8.6) é do tipo $r\cos\theta = \pm\rho$ e representa a reta perpendicular ao eixo polar, distante ρ unidades do pólo, ilustrada na Figura 8.10(a).

(ii) Reta Horizontal: A equação $r\operatorname{sen}\theta = \pm\rho$, decorrente de (8.6), com $\varphi = \pm\pi/2$ e $\rho > 0$, representa a reta paralela ao eixo polar, distante ρ unidades do pólo, ilustrada na Figura 8.10(b).

■ A CIRCUNFERÊNCIA: A Figura 8.11 ilustra a circunferência γ de centro $C(\rho, \varphi)$ e raio a.

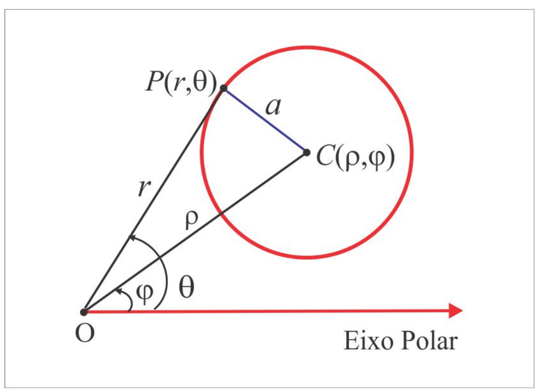


Figura 8.11: A Circunferência

Decorre da Lei dos Cossenos que:

$$P(r,\theta) \in \gamma \Leftrightarrow r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \varphi) = a^2$$

e temos os seguintes casos particulares:

(i) Circunferência I: A Figura 8.12 ilustra o caso $\rho = 0$ e $\varphi = 0$ em que a equação se reduz a $r = a$ e representa a circunferência de raio a e centro no pólo. A equação cartesiana é $x^2 + y^2 = a^2$.

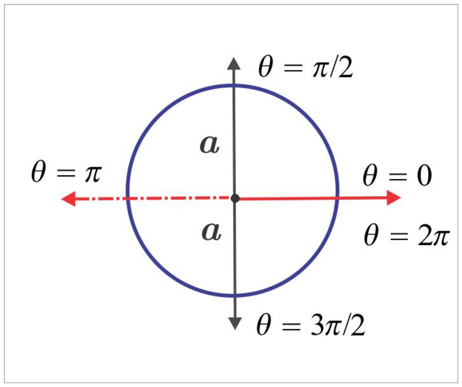


Figura 8.12: A Circunferência $r = a$.

(ii) Circunferências II: No caso $\rho = a$ e $\varphi = 0$ temos as circunferências $r = \pm 2a\cos\theta$ ilustradas na Figura 8.13, com equação cartesiana $(x \pm a)^2 + y^2 = a^2$.

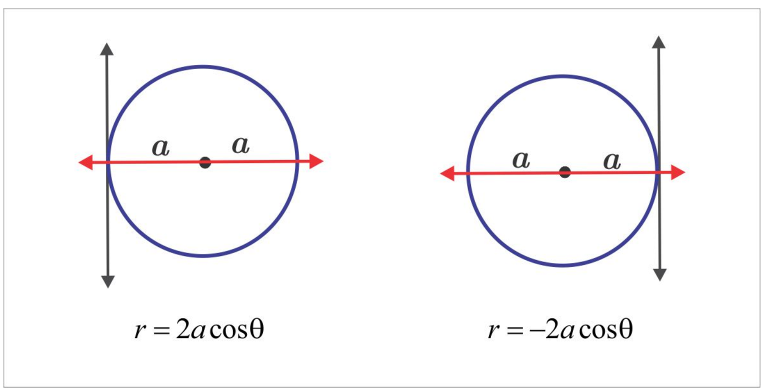


Figura 8.13: As Circunferências $r = \pm 2a\cos\theta$.

Por exemplo, para descrever a circunferência de equação cartesiana $(x-1)^2 + y^2 = 1$ na forma polar basta observar que:

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + y^2 &= 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x \\ &\Leftrightarrow r^2 = 2r\cos\theta \Leftrightarrow \boxed{r = 2\cos\theta.}\end{aligned}$$

(iii) Circunferências III: No caso $\rho = a$ e $\varphi = \pi/2$ temos as circunferências $r = \pm 2a \operatorname{sen} \theta$, ilustradas na Figura 8.14, com equação cartesiana $x^2 + (y \pm a)^2 = a^2$.

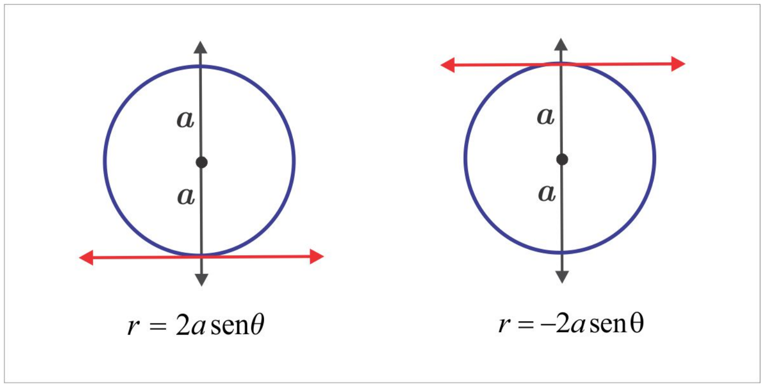


Figura 8.14: As Circunferências $r = \pm 2a \operatorname{sen} \theta$.

■ AS CÔNICAS: Dados uma reta l e um ponto F fora da reta l, a equação:

$$\boxed{|FP| = \mathrm{e} \cdot \operatorname{dist}(P;l)} \tag{8.7}$$

representa a *cônica* com *diretriz* l e *foco* F. O número real e, denominado *excentricidade* da cônica, mede o achatamento da curva e a reta que passa no foco, ortogonal à diretriz, é o *eixo focal*. A cônica é:

(a) uma parábola, se $e = 1$ **(b)** uma elipse, se $e < 1$ e **(c)** uma hipérbole, se $e > 1$.

Vamos investigar as situações mais frequentes:

SITUAÇÃO I: O foco F coincide com o pólo e o eixo focal é o eixo polar. Dado um ponto $P(r, \theta)$ da cônica, temos:

$$r = |FP| = e \cdot \operatorname{dist}(P;l) = e \cdot |PQ|$$

e, por outro lado:

$$\begin{aligned} |PQ| &= |BD| = |FD| - |FB| = p - r\cos(\pi - \theta) \\ &= p + r\cos\theta, \end{aligned}$$

onde $p = |FD| = \operatorname{dist}(F;l)$. Assim, temos $r = e(p + r\cos\theta)$, isto é:

$$r = \frac{e \cdot p}{1 - e\cos\theta} \tag{8.8}$$

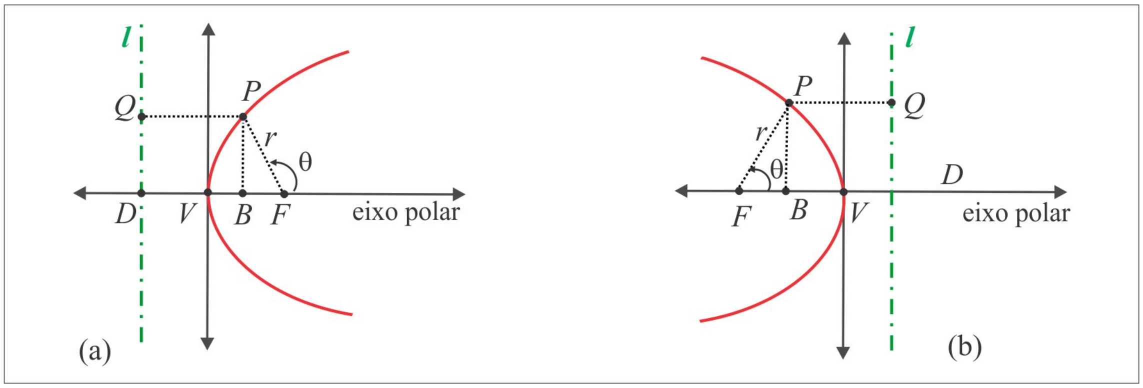


Figura 8.15: As cônicas $r = ep\,(1 \pm e\cos\theta)^{-1}$.

que representa a cônica com foco no pólo e diretriz l à esquerda do foco, como ilustra a Figura 8.15(a).

No caso em que a diretriz l situa-se à direita do foco, como na Figura 8.15(b), então $|FB| = r\cos\theta$ e a equação da cônica é:

$$r = \frac{e \cdot p}{1 + e\cos\theta}. \tag{8.9}$$

SITUAÇÃO II: O foco coincide com o pólo e o eixo focal é $\theta = \pi/2$. Existem dois casos a considerar a depender da posição da diretriz l, que pode estar acima ou abaixo do pólo. Supondo que a diretriz esteja abaixo do foco, como ilustra a Figura 8.16(a), então:

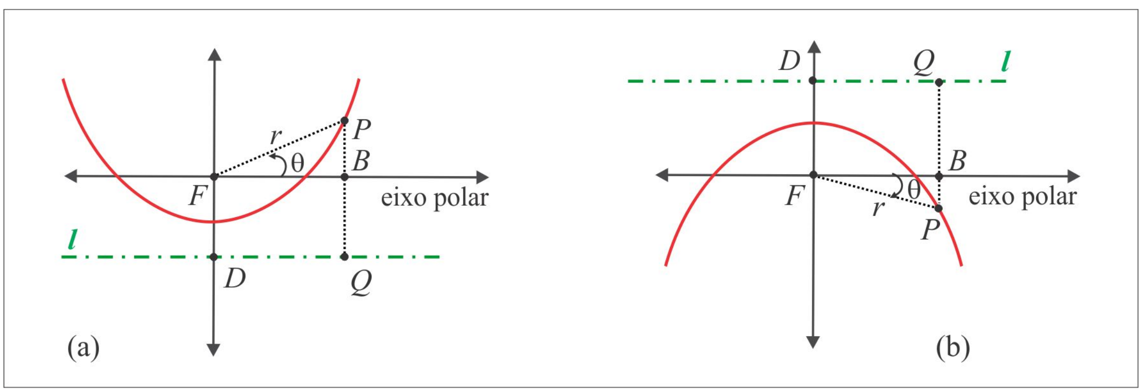


Figura 8.16: As cônicas $r = ep\,(1 \pm e\,\mathrm{sen}\,\theta)^{-1}$.

$$|PQ| = |BQ| + |PB| = p + r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

e de (8.7), chegamos à equação da cônica:

$$r = \frac{e \cdot p}{1 - e\,\mathrm{sen}\,\theta} \tag{8.10}$$

No caso em que a diretriz l situa-se acima do foco, como ilustra a Figura 8.16(b), a equação da cônica é:

$$r = \frac{e \cdot p}{1 + e \operatorname{sen} \theta} \tag{8.11}$$

EXEMPLO 8.2.2 *Considerando* $\rho = a = \sqrt{2}/2$ *e* $\varphi = \pi/4$, *a equação*:

$$r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi) = a^2 \tag{8.12}$$

é equivalente a $r = \operatorname{sen} \theta + \cos \theta$ *e representa uma circunferência de raio* $a = \sqrt{2}/2$ *e centro* $C(\rho, \varphi)$. *Em coordenadas cartesianas, a circunferência* $r = \operatorname{sen} \theta + \cos \theta$ *é descrita por*:

$$(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 = 1/2.$$

EXEMPLO 8.2.3 *A equação* $r = 4(2 + \operatorname{sen} \theta)^{-1}$ *se enquadra no modelo* (8.11), *com* $p = 4$ *e* $e = 1/2$. *Trata-se, portanto, de uma elipse com um foco no pólo, eixo focal* $\theta = \pi/2$ *e diretriz* 4 *unidades acima do pólo como ilustra a Figura* 8.17. *Com* $\theta = \pi/2$ *e* $\theta = 3\pi/2$ *obtemos, respectivamente,* $r = 4/3$ *e* $r = 4$

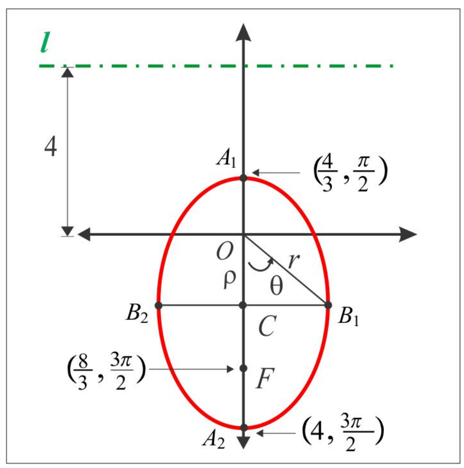


Figura 8.17: A Elipse $r = 4(2 + \operatorname{sen} \theta)^{-1}$.

e com isso encontramos os vértices $A_1(4/3, \pi/2)$ *e* $A_2(4, 3\pi/2)$. *O centro da elipse, que corresponde ao ponto médio do eixo maior* A_1A_2, *é o ponto* $C(\rho, 3\pi/2)$, *com* $\rho + 4/3 = 4 - \rho$, *isto é,* $\rho = 4/3$. *Os outros dois vértices são*:

$$B_1(r, 3\pi/2 + \theta) \quad e \quad B_2(r, 3\pi/2 - \theta)$$

com r *e* θ *dados por*:

$$r = |FB_1| = \operatorname{dist}(B_1; l) = \frac{1}{2}(4 + 4/3) = 8/3 \quad e \quad \theta = \pi/3.$$

EXEMPLO 8.2.4 *A equação polar* $r = 2(1-\cos\theta)^{-1}$, $0 < \theta < 2\pi$, *é do tipo* (8.10) *com* $e = 1$ *e* $p = 2$. *Trata-se, portanto, da parábola de equação cartesiana* $y^2 = 4(x+1)$.

■ (IV) AS CARDIOIDES: Seja $a > 0$ um número real fixado e consideremos a curva γ descrita pela equação polar $r = a(1-\cos\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Vejamos alguns aspectos gráficos da curva γ.

(i) Interseção com o eixo polar: Se $\theta = 0$, então $r = 0$ e se $\theta = \pi$, então $r = 2a$ e a curva passa nos pontos $(0,0)$ e $(2a,\pi)$.

(ii) Interseção com os eixos $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$: Com $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$, encontramos $r = a$ e a curva passa nos pontos $(a,\pi/2)$ e $(a,3\pi/2)$.

(iii) Simetria: A equação não é alterada ao trocarmos θ por $-\theta$ e isto indica que a curva é simétrica em relação ao eixo polar. Se $0 \le \theta < \pi/2$ então:

$$a(1-\cos\theta) \neq a\big[1-\cos(\pi-\theta)\big] \quad \text{e} \quad a(1-\cos\theta) \neq a\big[1-\cos(\pi+\theta)\big]$$

e isto indica que a curva não é simétrica nem ao eixo $\theta = \pi/2$ nem ao pólo.

(iv) Extensão do Lugar Geométrico: Considerando que $|\cos\theta| \le 1$, segue que r é finito, seja qual for o valor real assumido por θ e isto indica que a curva é fechada. Os valores máximo e mínimo assumidos por r são $r = 2a$ e $r = 0$ e ocorrem para $\theta = \pi$ e $\theta = 0$, respectivamente.

(v) O Gráfico: A Figura 8.18 ilustra a *cardióde* descrita pela equação polar $r = a(1-\cos\theta)$.

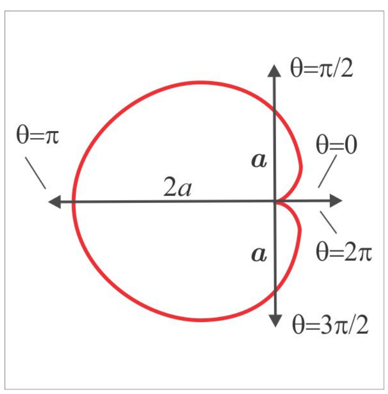


Figura 8.18: Cardioide $r = a(1-\cos\theta)$.

Uma análise similar é feita para as cardioides:

$$r = a\,(1 + \cos\theta)\,, \quad r = a\,(1 - \operatorname{sen}\theta) \quad \text{e} \quad r = a\,(1 + \operatorname{sen}\theta)$$

cujos gráficos estão ilustrados na Figura 8.19.

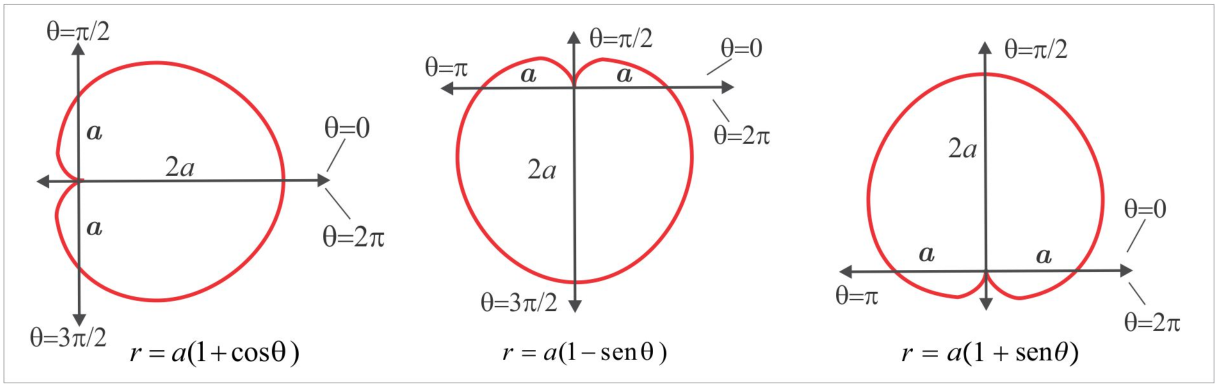


Figura 8.19: Outras Cardioides.

8.2.2 A Fórmula do Comprimento em Coordenadas Polares

Uma curva γ descrita em coordenadas polares pela equação $r = f(\theta)$, $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$, pode ser visualizada na forma paramétrica por:

$$\left|\begin{array}{l} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta, \quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2 \end{array}\right.$$

e um cálculo direto nos dá:

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\operatorname{sen}\theta \quad \text{e} \quad \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f(\theta)\cos\theta.$$

Usando a fórmula (8.4) para o comprimento, encontramos:

$$\boxed{L(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\,d\theta.} \tag{8.13}$$

EXEMPLO 8.2.5 *Com a fórmula (8.13), vamos calcular o comprimento da cardioide $r = a\,(1 - \cos\theta)$ ilustrada na Figura 8.18.*

SOLUÇÃO Temos $r = f(\theta) = a(1 - \cos\theta)$ e aplicando a fórmula (8.13), considerando que $1 - \cos\theta = 2\,\mathrm{sen}^2(\theta/2)$, obtemos:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1-\cos\theta)}\, d\theta = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\,\mathrm{sen}^2(\theta/2)}\, d\theta \\ &= 2a\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(\theta/2)\ d\theta = 2a\Big[-2\cos(\theta/2)\Big]_0^{2\pi} = 8a. \end{aligned}$$

8.2.3 A Fórmula da Área em Coordenadas Polares

A fórmula para o cálculo da área em coordenadas polares tem sua origem na área do setor circular. A Figura 8.20(a) ilustra um setor circular S, cuja área corresponde à fração da área do círculo:

$$A(S) = \frac{\theta}{2\pi}\left(\pi r^2\right) = \tfrac{1}{2}r^2\theta$$

e uma região D do plano, descrita em coordenadas polares por:

$$D: 0 \le r \le f(\theta) \quad \text{e} \quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2$$

ilustrada na Figura 8.20(b), tem porção elementar dA semelhante a um setor circular.

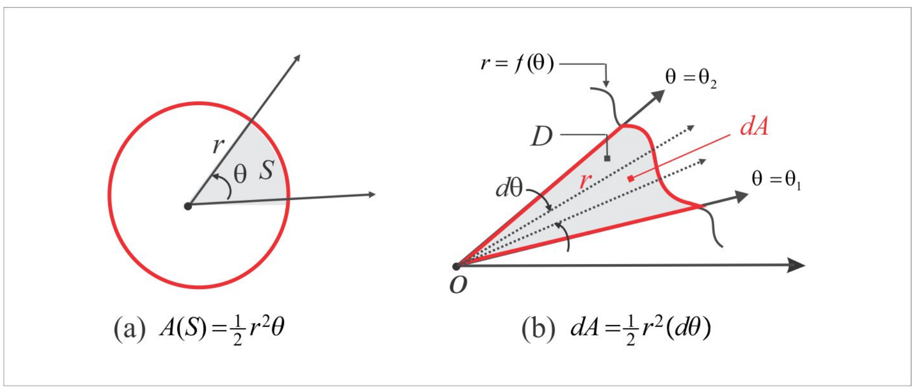


Figura 8.20: Área em Coordenadas polares.

A área da porção elementar dA é aproximada por $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$ e por integração encontramos:

$$\boxed{\mathrm{A}(D) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dA = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta)^2\, d\theta.} \tag{8.14}$$

EXEMPLO 8.2.6 *Como primeira ilustração, vamos calcular a área da região delimitada pela cardioide* $r = a(1 - \cos\theta)$ *da Figura 8.18. Aplicando a fórmula (8.14) com* $f(\theta) = a(1 - \cos\theta)$, *encontramos*:

$$\begin{aligned} A(D) &= \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2} a^2 (1 - \cos\theta)^2 \, d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta\right) d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \left[\theta - 2\,\text{sen}\,\theta + \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\text{sen}\,(2\theta)}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi a^2}{2}. \end{aligned}$$

No caso em que a região D é delimitada por duas curvas, como ilustra a Figura 8.21, ela é descrita pelas desigualdades $D: g(\theta) \le r \le f(\theta), \quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2$,

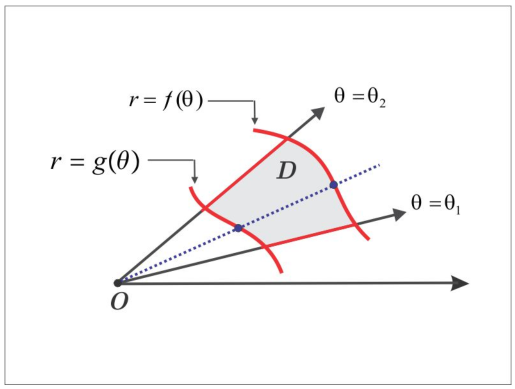


Figura 8.21: Área entre duas curvas.

e a fórmula para o cálculo da área torna-se:

$$\boxed{\mathrm{A}(D) = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[f(\theta)^2 - g(\theta)^2\right] d\theta.} \tag{8.15}$$

EXEMPLO 8.2.7 *Para ilustrar a fórmula (8.15), inicialmente vamos calcular a área da região* D *sugerida nos seguintes casos*:

(a) D *ilustrada na Figura 8.22(a), é exterior à cardioide* $r = a(1 - \text{sen}\,\theta)$ *e interior ao círculo* $r = a$.

De (8.15), segue que:

$$A(D) = \int_0^{\pi} \tfrac{1}{2} \left[a^2 - a^2 (1 - \text{sen}\,\theta)^2\right] d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} \left(2\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}^2\,\theta\right) d\theta = a^2 (2 - \pi/2)\,.$$

(b) D *é a região comum às cuvas* $\gamma_1 : r = 2a\cos\theta$ *e* $\gamma_2 : r = 2a\,\text{sen}\,\theta$, *ilustrada na Figura 8.22(b).*

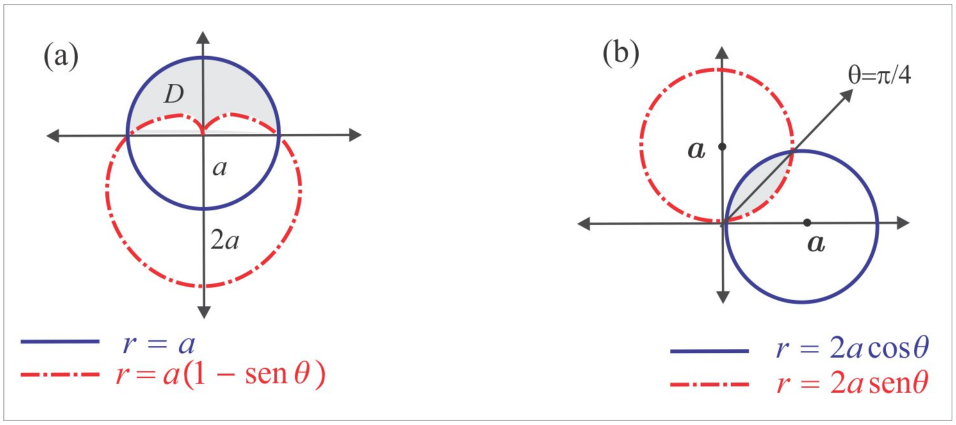


Figura 8.22: Regiões do Exemplo 8.2.7.

Neste caso, encontramos:

$$
\begin{aligned}
A(D) &= 2\int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}(2a\,\mathrm{sen}\,\theta)^2\,d\theta = 4a^2\int_0^{\pi/4}\tfrac{1}{2}\left[1-\cos(2\theta)\right]d\theta \\
&= 2a^2\left[\theta - \frac{\mathrm{sen}\,(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/4} = a^2\left(-1+\pi/2\right).
\end{aligned}
$$

EXEMPLO 8.2.8 *Calcular a área da região $\mathcal{R}$ interior à leminiscata $\gamma_1 : r^2 = 2a^2\cos(2\theta)$ e exterior ao círculo $\gamma_2 : r = a$ ilustrada na Figura 8.23.*

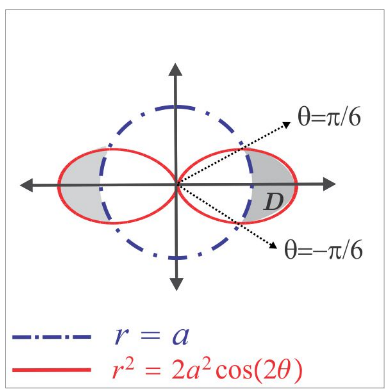


Figura 8.23: Região do Exemplo 8.2.8.

SOLUÇÃO Os pontos de interseção das curvas γ_1 e γ_2 são aqueles para os quais:

$$2a^2\cos(2\theta) = a^2. \tag{8.16}$$

Resolvendo a equação (8.16) encontramos $\theta = \pm\pi/6$ e um cálculo direto nos dá:

$$\begin{aligned} A(\mathcal{R}) &= 2A(D) = 2\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{1}{2}\left[2a^2\cos(2\theta) - a^2\right] d\theta = a^2 \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \left[2\cos(2\theta) - 1\right] d\theta \\ &= a^2\left(\sqrt{3} - \pi/3\right). \end{aligned}$$

EXEMPLO 8.2.9 *Calcular a área da região D interior à cardioide $\gamma_1 : r = a(1 + \operatorname{sen}\theta)$ e exterior ao círculo $\gamma_2 : r = a\operatorname{sen}\theta$.*

SOLUÇÃO A Figura 8.24 ilustra a situação gráfica.

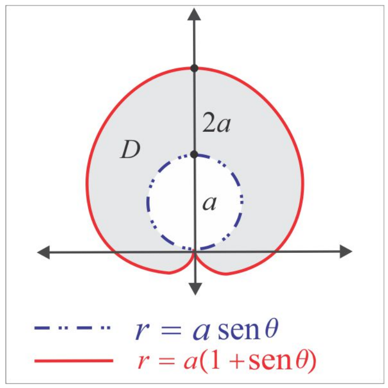


Figura 8.24: Região do Exemplo 8.2.9.

Para usar a fórmula (8.15), com $f(\theta) = a(1 + \operatorname{sen}\theta)$ e $g(\theta) = a\operatorname{sen}\theta$, primeiro separamos a região D em duas partes: a porção D_1 acima e a porção D_2 abaixo do eixo polar. Temos:

$$\begin{aligned} A(D_1) &= 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left[a^2(1 + \operatorname{sen}\theta)^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta\right] d\theta = a^2(2 + \pi/2), \\ A(D_2) &= 2\int_{-\pi/2}^{0} \frac{1}{2}a^2(1 + \operatorname{sen}\theta)^2\, d\theta = a^2(-2 + 3\pi/4) \end{aligned}$$

e, dessa forma, encontramos:

$$A(D) = A(D_1) + A(D_2) = \frac{5\pi a^2}{4}.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 8.2 (click aqui e veja a lista completa)

1. Localize no plano cartesiano os seguintes pontos dados em coordenadas polares e, em seguida, determine suas coordenadas cartesianas:

(a) $(2, \pi/4)$ (b) $(2, 3\pi/2)$ (c) $(3, \pi/6)$ (d) $(1, -\pi/4)$

(e) $(2, 5\pi/6)$ (f) $(-1, -\pi/4)$ (g) $(-2, 7\pi/6)$ (f) $(-3, 13\pi/6)$

2. Determine as coodenadas polares dos pontos cujas coordenadas cartesianas são:

(a) $(1, 1)$ (b) $(2, 0)$ (c) $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ (d) $(3, 3\sqrt{3})$

(e) $(-1, -1)$ (f) $(1, \sqrt{3})$ (g) $(-\sqrt{7}, 3)$ (h) $(0, -4)$

3. Passe para a forma polar $r = f(\theta)$ as seguintes curvas:

(a) $xy = 2$ (b) $x^2 + y^2 - 3y = 0$ (c) $3x^2 + 5y^2 = 15$

(d) $x + 1 = 0$ (e) $x^2 - y^2 = 1$ (f) $y^2 - 4x = 0.$

4. Passe para forma cartesiana $F(x, y) = 0$ e esboce o gráfico de cada curva abaixo:

(a) $r = 2 + \operatorname{sen} 2\theta$ (b) $r = \operatorname{sen} 2\theta$ (c) $r = \dfrac{4}{1 + \cos\theta}$ (d) $r = a\cos\theta$ (e) $r = 5$

(f) $r = 5 + 2\cos\theta$ (g) $r = 3\sec\theta$ (h) $r = 1 + \sqrt{2}\cos\theta$ (i) $r = 2\tan\theta$ (j) $r = \theta$

5. Determine, caso exista, a interseção entre os seguintes pares de curvas:

(a) $\gamma_1 : r = 2$ e $\gamma_2 : r = 4\cos\theta$ (b) $\gamma_1 : r = 1 + \cos\theta$ e $\gamma_2 : r = 1/3\,(1 - \cos\theta)$

(c) $\gamma_1 : r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$ e $\gamma_2 : r = 2\sqrt{2}\cos\theta$ (d) $\gamma_1 : \theta = \pi/4$ e $\gamma_2 : r = 2\cos\theta$

6. Calcule o comprimento das seguintes curvas dadas na forma polar:

(a) $\gamma : r = 3\cos\theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (b) $\gamma : r = 2\sec\theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ (c) $\gamma : r = 1 - \cos\theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

(d) $\gamma : r = \theta/3,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (e) $\gamma : r = |\operatorname{sen}\theta|\,,\ 0 \le \theta \le 2\pi$ (f) $\gamma : r = 3\cos^2(\frac{\theta}{2}),\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

7. Calcule a área da região interior a cada curva γ dada abaixo:

(a) $\gamma : r^2 = a^2\cos 2\theta$ (b) $\gamma : r = a\,(2 - \cos\theta)$ (c) $\gamma : r = 2a\operatorname{sen}\theta$

(d) $\gamma : r = a\,(1 + \cos 2\theta)$ (e) $\gamma : r^2 = 1 - \cos\theta$ (f) $\gamma : r^2 = 2a^2\cos^2(\theta/2)$

8. Em cada caso, esboce graficamente a região D e calcule a área $A(D)$.

(a) D é interior ao círculo $r = a$ e exterior à *cardióide* $r = a\,(1 - \cos\theta)$. (resp.: $a^2(2 - \pi/4)$)

(b) D é delimitada pelas curvas $r = 2,\ \theta = \pi/4$ e $\theta = \pi/2$. (resp.: $\pi/2$)

(c) D é interior à cardióide $r = a\,(1 + \operatorname{sen}\theta)$ e exterior ao círculo $r = a\operatorname{sen}\theta$. (resp.: $5\pi a^2/4$)

(d) D é comum aos círculos $r = 2a\cos\theta$ e $r = 2a\operatorname{sen}\theta$. (resp.: $a^2(-1 + \pi/2)$)

(e) D é interior à leminiscata $r^2 = 8\cos 2\theta$ e exterior ao círculo $r = 2$. (resp.: $\frac{4}{3}(3\sqrt{3} - \pi)$)

(f) D é interior ao círculo $r = 3\cos\theta$ e exterior à cardióide $r = 1 + \cos\theta$. (resp.: π)

(g) D é delimitada pela rosácea de 4 pétalas $r = a\,|\operatorname{sen} 2\theta|$ (resp.: $a^2\pi/2$)

(h) D é interior ao círculo $r = \cos\theta$ e exterior à cardióide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$. (resp.: $1 - \pi/4$)

(i) D é interior ao círculo $r = \operatorname{sen}\theta$ e exterior à cardióide $r = 1 - \cos\theta$. (resp.: $1 - \pi/4$)

8.3 Volume de Revolução

Consideremos uma curva γ no plano xy, aqui denominada *geratriz*, descrita pela relação $F(x, y) = 0$ e denotemos por S a superfície obtida pela rotação da curva γ em torno do eixo Ox. É claro que cada ponto da curva γ irá descrever uma circunferência de centro no ponto $C(x, 0, 0)$ e a superfície S é caracterizada por $\left\|\overrightarrow{CP}\right\| = \left\|\overrightarrow{CQ}\right\|$, onde $P(x, y, z)$ é um ponto genérico da superfície S e $Q(x, \bar{y}, 0)$ é o ponto de interseção da curva γ com o plano que passa por P, perpendicularmente ao eixo x (*eixo de rotação*), como sugere a Figura 8.25.

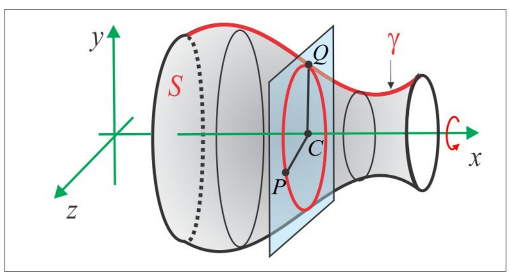


Figura 8.25: Superfície de Revolução.

A equação $\left\|\overrightarrow{CP}\right\| = \left\|\overrightarrow{CQ}\right\|$ que descreve a superfície S se reduz a $\bar{y}^2 = y^2 + z^2$ e como o ponto $Q(x, \bar{y}, 0)$ jaz sobre a curva γ, temos $F(x, \bar{y}) = 0$ e a equação de S é:

$$\boxed{S: \; F\left(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}\,\right) = 0.}$$

No caso em que a curva γ é o gráfico da função $y = f(x)$ a equação da superfície S é:

$$\boxed{S: \; y^2 + z^2 = \left[f(x)\right]^2.}$$

EXEMPLO 8.3.1 *Ao girar o arco de circunferência* $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ *encontramos a esfera* S, *de centro na origem e raio* R, *descrita por*:

$$y^2 + z^2 = \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{S: \ x^2 + y^2 + z^2 = R^2.}$$

8.3.1 Volume de Revolução - Método das Fatias

O *Método das Fatias*, ou dos *Discos Circulares*, tem sua origem na fórmula clássica $V = \pi R^2 h$ que representa o volume de um cilindro circular reto de raio R e altura h. Para decrever o método, deixe-nos considerar um corpo Ω, gerado pela rotação de certa região D do plano xy, em torno do eixo Ox, e por simplicidade consideremos a região:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq f(x)\right\}$$

ilustrada na Figura 8.26.

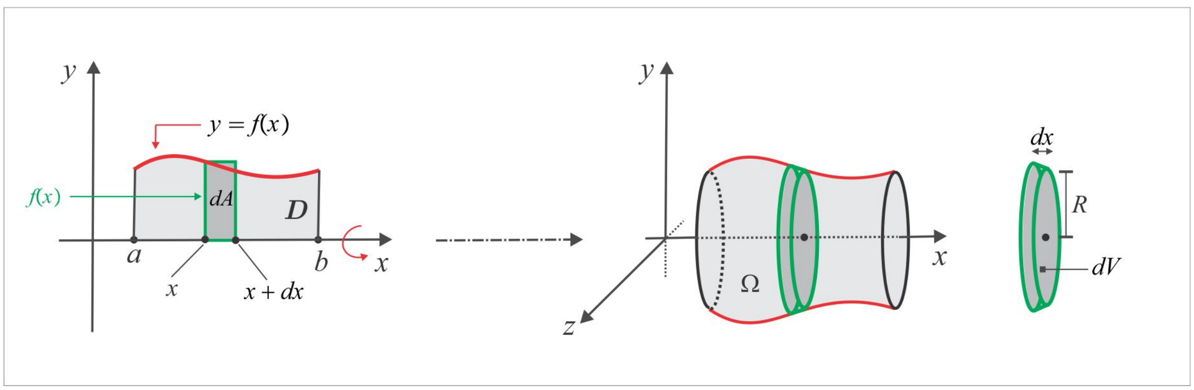


Figura 8.26: Volume de Revolução.

O volume elementar dV produzido pela rotação da fatia dA entre x e $x + dx$ assemelha-se ao volume do cilindro de raio $R = |f(x)|$ e altura $h = dx$ e, portanto:

$$dV \simeq \pi \left[f(x)\right]^2 dx.$$

Por integração, encontramos:

$$\boxed{\text{vol}(\Omega) = \int_a^b dV = \int_a^b \pi \left[f(x)\right]^2 dx.} \tag{8.17}$$

EXEMPLO 8.3.2 (Volume da Bola Esférica.) *A bola esférica de raio R é gerada pela rotação em torno do eixo Ox da região $D : -R \le x \le R;\ 0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}$, como ilustra a Figura 8.27.*

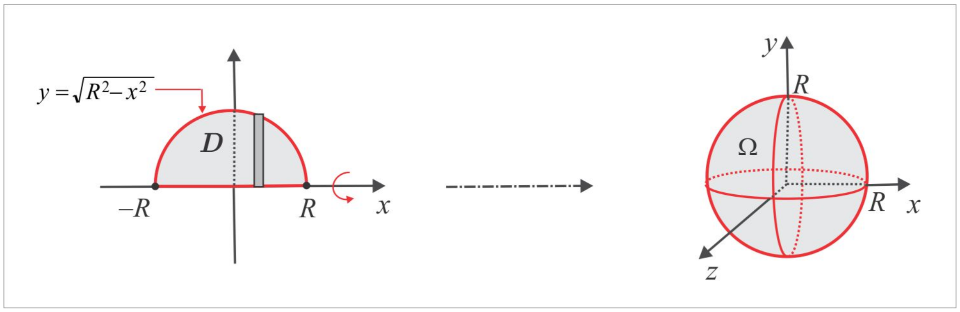


Figura 8.27: Volume da Bola Esférica.

Temos $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ e de acordo com (8.17), encontramos:

$$\operatorname{vol}(\Omega) = \int_{-R}^{R} \pi f(x)^2\, dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi \left(R^2 x \Big|_{-R}^{R} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-R}^{R} \right) = \boxed{4\pi R^3/3.}$$

EXEMPLO 8.3.3 (Volume do Cone Circular Reto.) *A rotação em torno do eixo Ox da região triangular D, ilustrada na Figura 8.28, produz o cone circular reto de raio R e altura H.*

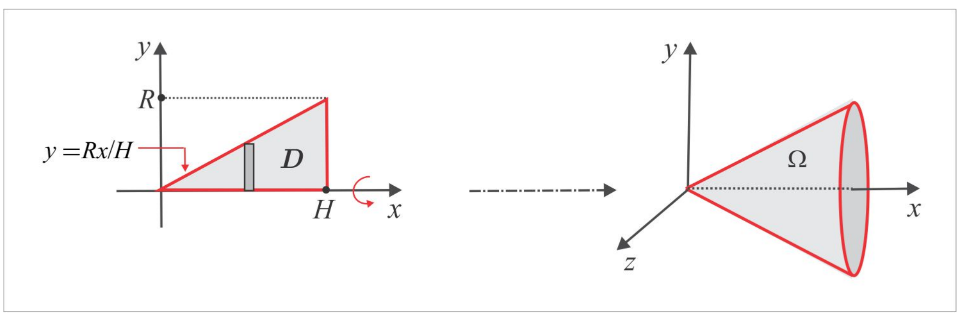


Figura 8.28: Volume do Cone Circular Reto.

Aqui $D : 0 \le x \le H;\ 0 \le y \le Rx/H$, de modo que $dV = \pi (Rx/H)^2\, dx$ e, assim, temos:

$$\operatorname{vol}(\Omega) = \int_0^H \pi \left[f(x) \right]^2 dx = \pi \int_0^H \left(\frac{R^2}{H^2} \right) x^2 dx = \boxed{\pi R^2 H/3.}$$

OBSERVAÇÃO 8.3.4 *No caso em que a rotação se processa em torno do eixo Oy, como sugere a Figura 8.29, a região D deve ser descrita sob a forma:*

$$D : c \le y \le d \quad e \quad 0 \le x \le g(y)$$

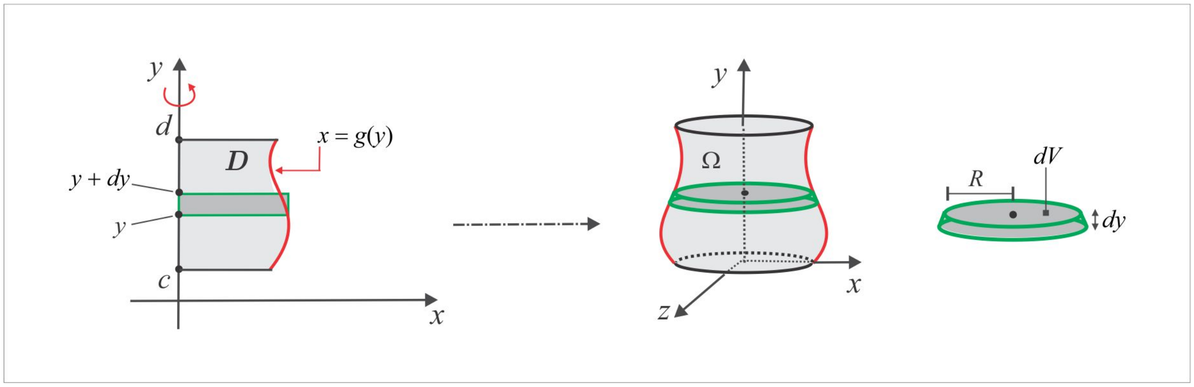


Figura 8.29: Rotação em torno do eixo Oy.

O volume elementar dV é aproximado por:

$$dV \simeq \pi\big[g\,(y)\,\big]^2 dy.$$

e o volume do corpo Ω é a "soma" dos volumes elementares dV e vem dado por:

$$\boxed{\text{vol}(\Omega) = \int_c^d dV = \int_c^d \pi\big[g(y)\big]^2 dy.} \tag{8.18}$$

EXEMPLO 8.3.5 (O volume do Paraboloide) *A Figura 8.30 ilustra o paraboloide Ω gerado pela rotação da região D em torno do eixo Oy.*

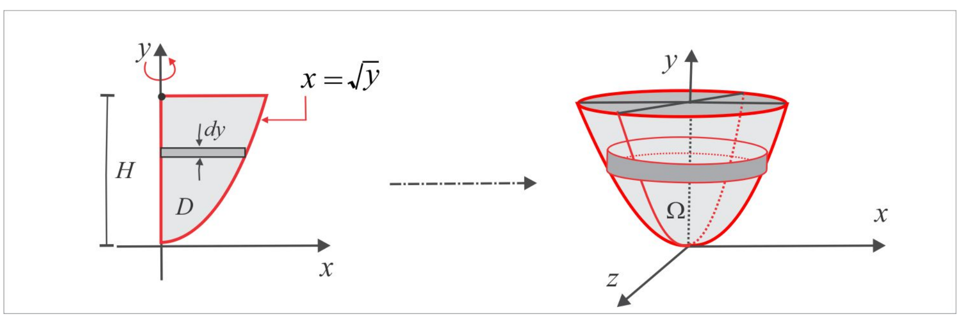


Figura 8.30: Paraboliode de Revolção.

Se D é a região do plano xy, descrita por $D: 0 \leq y \leq H$ *e* $0 \leq x \leq \sqrt{y}$, *então o paraboloide Ω é descrito por:*

$$\Omega : x^2 + z^2 \leq y \leq H$$

e tem volume dado por:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_0^H dV = \int_0^H \pi \left[\sqrt{y}\right]^2 dy = \boxed{\pi H^2/2.}$$

EXEMPLO 8.3.6 (Volume do Elipsoide de Revolução) *A região D do plano xy, entre o eixo Oy e a curva*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x \geq 0,$$

gira em torno do eixo Oy, produzindo o elipsoide de revolução Ω ilustrado na Figura 8.31.

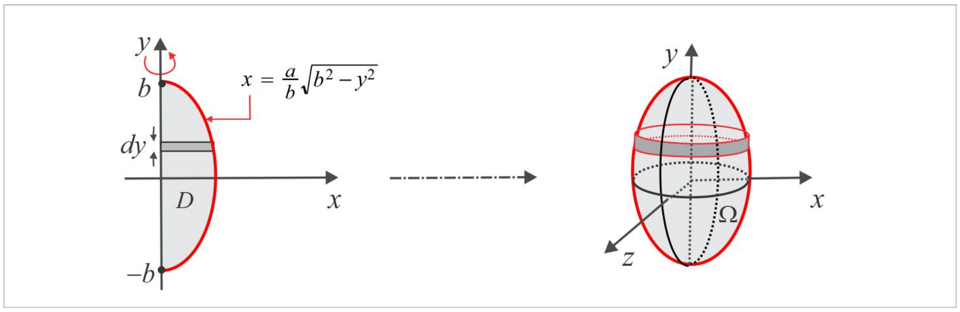


Figura 8.31: Elipsoide de Revolção.

A curva geratriz $x = g(y)$ e o volume elementar dV são dados por:

$$g(y) = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \quad e \quad dV = \pi\left[\frac{a^2}{b^2}\left(b^2 - y^2\right)\right] dy$$

e de acordo com (8.18) *o volume do corpo Ω é, portanto*:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_{-b}^{b} dV = \frac{\pi a^2}{b^2}\int_{-b}^{b}\left(b^2 - y^2\right) dy = \boxed{4\pi a^2 b/3.}$$

Rotação em torno de um Eixo Horizontal

Vamos, agora, considerar o caso em que a região D do plano xy gira em torno do eixo horizontal $L : y = p$, situado acima ou abaixo da região. A Figura 8.32 sugere o caso em que o eixo L está abaixo da região D, a qual é descrita por:

$$D : a \leq x \leq b \quad \text{e} \quad f(x) \leq y \leq g(x), \tag{8.19}$$

sendo $y = f(x)$ e $y = g(x)$ funções contínuas no intervalo $a \leq x \leq b$. É oportuno ressaltar que o processo se inicia medindo-se as distâncias dos gráficos das funções f e g ao eixo de rotação e, dessa forma, o volume elementar dV aproxima-se de um cilindro vazado de raios R e r e altura dx, isto é:

$$dV \simeq \pi \left[R^2 - r^2\right] dx, \qquad \text{com} \quad R = \text{dist}\,(A;C) \quad \text{e} \quad r = \text{dist}\,(B;C)\,.$$

Em coordenadas, temos $A\,(x, g\,(x))\,,\ B\,(x, f\,(x))$ e $C\,(x,p)$, de modo que:

$$R^2 = [g\,(x) - p]^2\,,\ r^2 = [f\,(x) - p]^2 \quad \text{e} \quad dV = \pi \left[(g\,(x) - p)^2 - (f\,(x) - p)^2\right] dx.$$

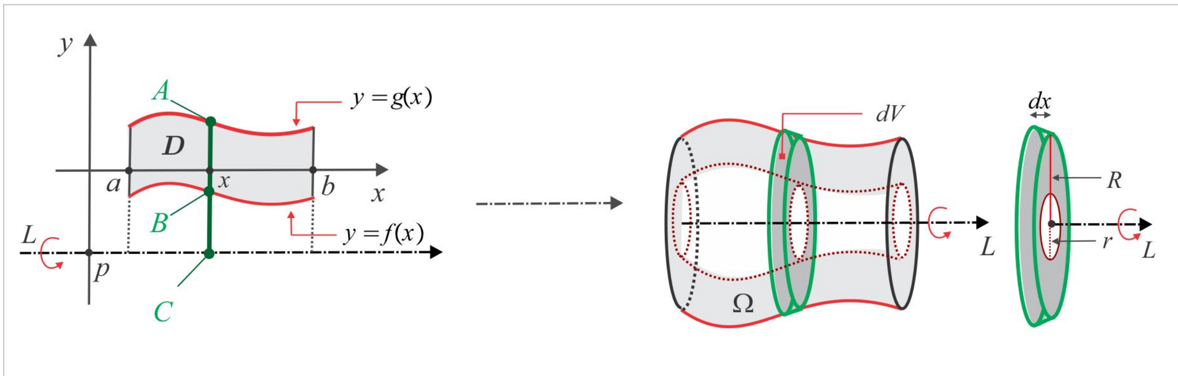


Figura 8.32: Rotação em torno de um eixo horizontal.

e, assim, o volume do corpo Ω é, dado por:

$$\boxed{\text{vol}(\Omega) = \int_a^b dV = \int_a^b \pi\left[\left(g(x) - p\right)^2 - \left(f(x) - p\right)^2\right] dx.} \qquad (8.20)$$

Rotação em torno de um Eixo Vertical

No caso em que o eixo de rotação é vertical, digamos $L : x = q$, situado à direita ou à esquerda da região, o processo é similar ao caso anterior, com uma ressalva: as funções que delimitam a área D devem ser postas na forma $x = g\,(y)$ e $x = f\,(y)$, isto é, D é descrita por:

$$D : c \le y \le d \quad \text{e} \quad f\,(y) \le x \le g\,(y)\,, \qquad (8.21)$$

sendo $f\,(y)$ e $g\,(y)$ funções contínuas no intervalo $c \le y \le d$. A Figura 8.33 ilustra a situação em que o eixo de rotação situa-se à direita da região, onde vemos o cilindro vazado dV de altura dy e raios $R = \text{dist}\,(A;C)$ e $r = \text{dist}\,(B;C)$. Neste caso, temos $dV \simeq \pi \left[R^2 - r^2\right] dy$, e considerando os pontos $A\,(f\,(y)\,, y)\,,\ B\,(g\,(y)\,, y)$ e $C\,(q,y)$, encontramos:

$$dV = \pi \left[(f\,(y) - q)^2 - (g\,(y) - q)^2\right] dy.$$

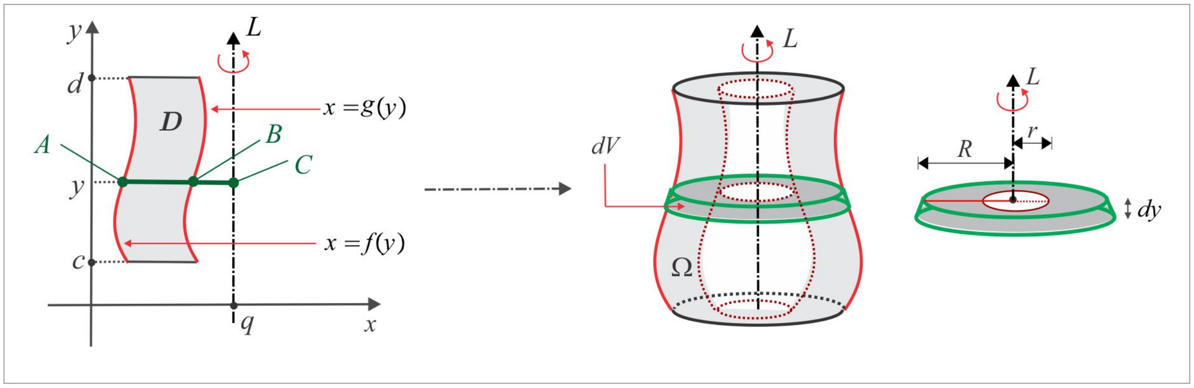


Figura 8.33: Rotação em torno de um eixo vertical.

O volume do corpo Ω, que é *Soma* dos volumes elementares dV, é calculado pela integral:

$$\boxed{\mathrm{vol}(\Omega) = \int_c^d dV = \int_c^d \pi\left[\left(f(y)-q\right)^2 - \left(g(y)-q\right)^2\right]dy.} \tag{8.22}$$

EXEMPLO 8.3.7 *A Figura 8.34 ilustra duas regiões D_1 e D_2 e desejamos calcular o volume do corpo Ω, sugerido nos seguintes casos*:

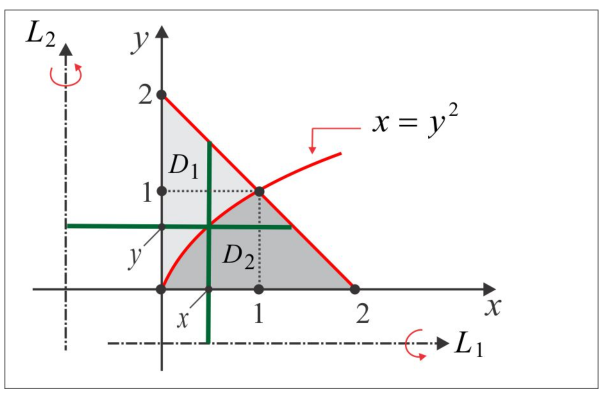


Figura 8.34: Ilustração gráfica do Exemplo 8.3.7.

(i) *Ω é gerado pela rotação da região D_1, em torno do eixo $L_1 : y = -1/2$.*

(ii) *Ω é gerado pela rotação da região D_2, em torno do eixo $L_2 : x = -1$.*

(iii) *Ω é gerado pela rotação da região D_2, em torno do eixo $L_1 : y = -1/2$.*

(iv) *Ω é gerado pela rotação da região D_1, em torno do eixo $L_2 : x = -1$.*

SOLUÇÃO As regiões D_1 e D_2 são descritas por:

$$D_1 : 0 \leq x \leq 1;\ \sqrt{x} \leq y \leq 2 - x \quad \text{e} \quad D_2 : 0 \leq y \leq 1;\ y^2 \leq x \leq 2 - y$$

e assim, temos:

(i) $R^2 = (5/2 - x)^2$, $r^2 = (\sqrt{x} + 1/2)^2$ e $dV = \pi \left[R^2 - r^2\right] dx = \pi \left(x^2 - 4x - \sqrt{x} + 6\right) dx$. Logo:

$$\operatorname{vol}(\Omega) = \int_0^1 dV = \pi \int_0^1 \left(x^2 - 4x - \sqrt{x} + 6\right) dx = \boxed{11\pi/6.}$$

(ii) $R^2 = (3 - y)^2$, $r^2 = \left(y^2 + 1\right)^2$ e $dV = \pi \left[R^2 - r^2\right] dy = \pi \left(y^4 - y^2 - 6y + 8\right) dy$. Logo:

$$\operatorname{vol}(\Omega) = \int_0^1 dV = \pi \int_0^1 \left(y^4 - y^2 - 6y + 8\right) dy = \boxed{17\pi/10.}$$

(iii) Aqui é necessário dividir a região D_2 em subregiões R_1 e R_2 do tipo (8.19) e aplicar a cada uma delas a fórmula (8.20). Sejam então:

$$R_1 : 0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq \sqrt{x} \quad \text{e} \quad R_2 : 1 \leq x \leq 2;\ 0 \leq y \leq 2 - x$$

e Ω_1 e Ω_2 os respectivos volumes gerados por R_1 e R_2. Temos:

$$\operatorname{vol}(\Omega_1) = \pi \int_0^1 \left[\left(\sqrt{x} + 1/2\right)^2 - \frac{1}{4}\right] dx = 7\pi/6 \quad \text{e} \quad \operatorname{vol}(\Omega_2) = \pi \int_1^2 \left[(5/2 - 1x)^2 - \frac{1}{4}\right] dx = 5\pi/6$$

e, portanto:

$$\operatorname{vol}(\Omega) = \operatorname{vol}(\Omega_1) + \operatorname{vol}(\Omega_2) = \boxed{2\pi.}$$

(iv) A situação é semelhante ao caso anterior, com uma ressalva: as subregiões R_1 e R_2 devem descritas sob a forma (8.21). Temos:

$$R_1 : 0 \leq y \leq 1;\ 0 \leq x \leq y^2 \quad \text{e} \quad R_2 : 1 \leq y \leq 2;\ 0 \leq x \leq 2 - y$$

e usando (8.22), encontramos:

$$\operatorname{vol}(\Omega_1) = \pi \int_0^1 \left[\left(y^2 + 1\right)^2 - 1^2\right] dy = 13\pi/15 \quad \text{e} \quad \operatorname{vol}(\Omega_2) = \pi \int_1^2 \left[(2 - y + 1)^2 - 1^2\right] dy = 4\pi/3.$$

Logo:

$$\operatorname{vol}(\Omega) = \operatorname{vol}(\Omega_1) + \operatorname{vol}(\Omega_2) = \boxed{11\pi/5.}$$

8.3.2 Volume de Revolução - Método das Cascas Cilíndricas

Ao contrário do que ocorre no Método das Fatias, em que a fatia dA é perpendicular ao eixo de rotação, agora a fatia dA é paralela ao eixo. Primeiro, suponhamos que o sólido Ω seja gerado pela rotação da região *vertical simples* D em torno do eixo (reta vertical), distante p unidades do eixo Oy, como ilustra a Figura 8.35.

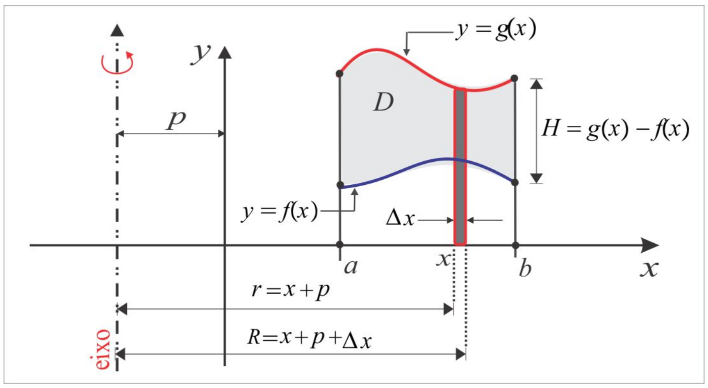


Figura 8.35: Volume por Cascas Cilíndricas.

O *volume infinitesimal* dV é aproximado por $dV \simeq \pi\left[R^2 - r^2\right] \cdot H$, onde $R = x+p+\Delta x$ e $r = x+p$, e assim temos:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \pi\left[(x+p+\Delta x)^2 - (x+p)^2\right]\left[g(x) - f(x)\right] \\ &= 2\pi(x+p)(\Delta x)\left[g(x) - f(x)\right] + (\Delta x)^2\left[g(x) - f(x)\right] \end{aligned}$$

de onde resulta:

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = 2\pi(x+p)\left[g(x) - f(x)\right] + (\Delta x)\left[g(x) - f(x)\right]. \tag{8.23}$$

Fazendo $\Delta x \to 0$ em (8.23) encontramos $V'(x) = 2\pi(x+p)f(x)$ e daí segue o volume elementar:

$$dV = 2\pi(x+p)\left[g(x) - f(x)\right]dx.$$

O volume de Ω é a *Soma* desses volumes infinitesimais, isto é:

$$\boxed{\operatorname{vol}(\Omega) = \int_a^b 2\pi(x+p)\left[g(x) - f(x)\right]dx.} \tag{8.24}$$

EXEMPLO 8.3.8 *Deixe-nos reconsiderar a situação* (**iv**) *do Exemplo* 8.3.7 *e calcular o volume do corpo* Ω *pelo Método das Cascas Cilíndricas. Neste caso, temos*:

$$\operatorname{vol}(\Omega) = \int_0^1 2\pi (x+1) \left[2 - x - \sqrt{x}\,\right] dx = 2\pi \int_0^1 \left(2 + x - \sqrt{x} - x^2 - x^{3/2}\right) dx = \boxed{11\pi/5.}$$

Outra situação ocorre pela rotação da região horizontal simples $D : c \le y \le d;\ f(y) \le x \le g(y)$ em torno de um eixo horizontal, distante q unidades do eixo Ox, como ilustrado na Figura 8.36.

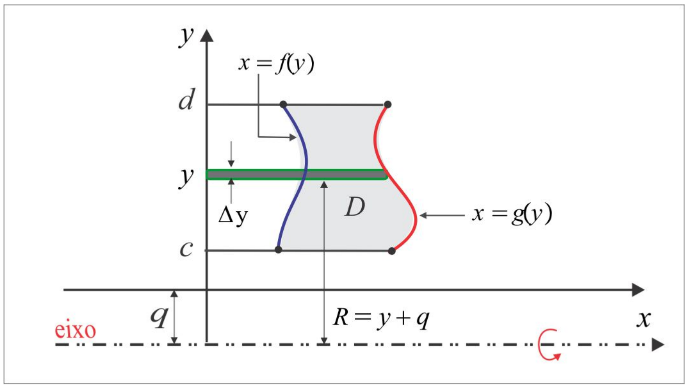


Figura 8.36: Volume por Cascas Cilíndricas.

Para esta situação, o volume elementar dV vem dado por:

$$dV = 2\pi (y+q) \left[g(y) - f(y)\right] dy$$

e o volume do corpo Ω é calculado pela fórmula:

$$\boxed{\operatorname{vol}(\Omega) = \int_c^d 2\pi (y+q)\left[g(y) - f(y)\right] dy.} \tag{8.25}$$

EXEMPLO 8.3.9 *Com relação ao Exemplo* 8.3.7, *o volume do corpo* Ω *na situação* (*iii*) *pode ser calculado pelo Método da Cascas Cilíndricas. Da fato, neste caso o volume elementar é*:

$$dV = 2\pi (y + 1/2) \left(2 - y - y^2\right) dy = 2\pi \left(1 + 3y/2 - 3y^2/2 - y^3\right) dy$$

e um cálculo direto nos dá:

$$\operatorname{vol}(\Omega) = \int_0^1 dV = \int_0^1 \left(1 + 3y/2 - 3y^2/2 - y^3\right) dy = \boxed{2\pi.}$$

EXEMPLO 8.3.10 (Usando uma Rotação de Eixos) *Calcular o volume do corpo* Ω *obtido por rotação, em torno da reta* $y = x$, *da região triangular* D *de vértices* $O(0,0)$, $A(1,0)$ *e* $B(1,1)$.

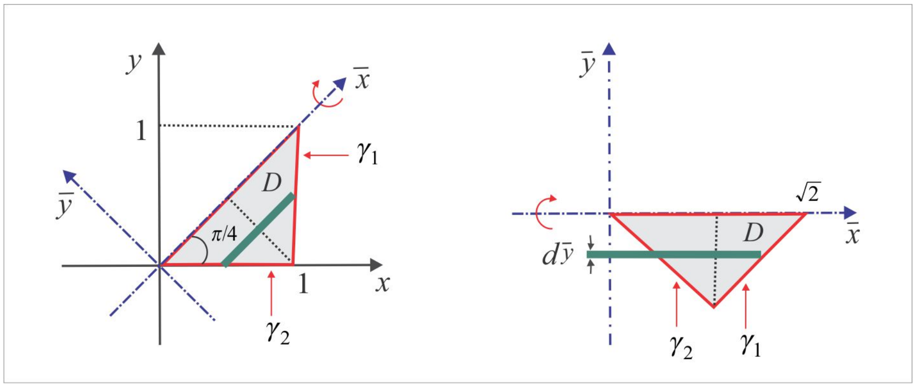


Figura 8.37: Usando uma rotação.

SOLUÇÃO A Figura 8.37 ilustra a situação gráfica antes e após a rotação.

No sistema $\bar{x}O\bar{y}$ a região D, situada no 4^{o} quadrante , é delimitada pelo eixo $\bar{x}$ e pelas retas:

$$\gamma_1 : \bar{x} = \bar{y} + \sqrt{2}/2 \quad \text{e} \quad \gamma_2 : \bar{x} = -\bar{y}$$

e usando (8.25), com $q = 0$, $g(\bar{y}) = \bar{y} + \sqrt{2}/2$ e $f(\bar{y}) = -\bar{y}$, encontramos:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_{-\sqrt{2}/2}^{0} 2\pi\bar{y}\big[g(\bar{y}) - f(\bar{y})\big]d\bar{y} = 2\pi\int_{-\sqrt{2}/2}^{0} \bar{y}\left(2\bar{y} + \sqrt{2}/2\right)d\bar{y} = \boxed{\pi\sqrt{2}/6.}$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 8.3 (click aqui e veja a lista completa)

1. Identifique o eixo e a geratriz da superfície de revolução, cuja equação cartesiana é:

   (a) $z = x^2 + y^2$ (b) $x = y^2 + z^2$ (c) $y^2 = x^2 + z^2$

   (d) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (e) $x^2 + y^2 = 1$ (f) $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 36$.

2. Em cada caso abaixo, esboce a região D delimitada pelas curvas sugeridas e em seguida calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região D em torno do eixo indicado.

   (a) $y = x^4 - 2x^2,\ y = 2x^2,\ x \geq 0$; eixo y (b) $y = x^2 - 4x,\ y = 0$; eixo x

   (c) $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 4$; eixo $x = 4$ (d) $x^2 + y^2 = 1$; eixo $x = 2$

   (e) $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 4$; eixo $y = 2$ (f) $y = x,\ y = 0,\ x = 2$; eixo y

   (g) $y = x^2,\ y = 4 - x^2$; eixo x (h) $xy = 1,\ y = 0,\ x = 1$ e $x = 2$; eixo x.

3. Uma região D do plano xy é delimitada pelo triângulo de vértices $(0,0)$, $(h,0)$ e (h,r), sendo h e r números positivos. Calcule o volume do sólido resultante da rotação da região D em torno do eixo x (resp. $\pi r^2 h/3$). E se a rotação fosse em torno do eixo y? (resp.: $2\pi r h^2/3$))

4. Qual o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região do plano xy delimitada pela parábola $y = x^2$, pelo eixo x e pelas retas $y = 2x - 1$ e $y = x + 2$? (resp.: $13\pi/6$))

5. Considere a curva de equação $y^2 = x^3$ e as regiões R_1 e R_2, ilustradas na figura.

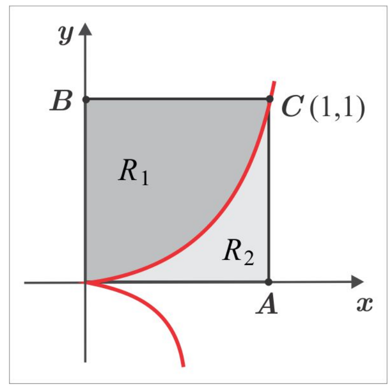
   Determine o volume do sólido em cada situação a seguir:

   (a) R_2 gira em torno do eixo x;

   (b) R_1 gira em torno do eixo y;

   (c) R_2 gira emtorno do eixo BC;

   (d) R_1 gira em torno do eixo AC.



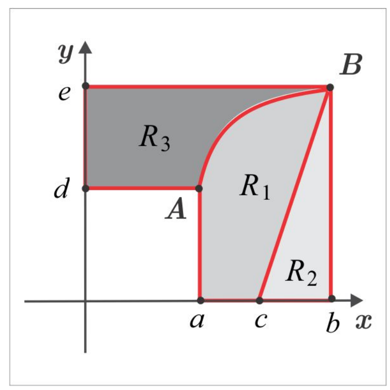
6. O arco AB ilustrado na figura é o gráfico de certa função $y = f(x)$, $a \le x \le b$.

   Identifique o sólido de revolução cujo volume é:

   (a) $\displaystyle\int_a^b \pi f(x)^2 dx$ (b) $\displaystyle\int_c^d \pi f^{-1}(y)^2 dy$

   (c) $\displaystyle\int_d^e 2\pi y f^{-1}(y) dx$ (d) $\displaystyle\int_a^b \pi f(x)^2 dx - \pi e^2(b-c)/3$

   (e) $\displaystyle\int_a^b 2\pi f(x) dx$ (f) $\displaystyle\pi(be^2 - ad^2) - \int_a^b \pi f(x)^2 dx.$



7. É feito um orifício de raio $2\sqrt{3}$ pelo centro de um sólido esférico de raio $R = 4$. Calcule o volume da porção retirada do sólido. (resp.: $224\pi/3$)

8. Calcule o volume de um tronco de cone circular reto de altura h, raio da base inferior R e raio da base superior r.

9. Calcule o volume de uma calota determinada em uma esfera de raio r por um plano cuja distância ao centro da esfera é h, $h < r$. (resp.: $2\pi R^3/3 + \pi h^3/3 - \pi r^2 h$)

10. Calcule pelos dois métodos (Fatiamento e Cascas Cilíndricas) o volume do sólido obtido por rotação em torno do eixo y da região delimitada pela curva $y = 2x - x^2$ e o eixo x.

11. Ao girar em torno do eixo y uma certa região do plano xy, obteve-se a seguinte expressão para o volume do sólido resultante:

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/4} (x\cos x - x \operatorname{sen} x)\, dx.$$

Identifique a região e calcule o volume V.

12. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região delimitada pelas retas $y = 0,\ x = 2$ e $x = 2y$, em torno da reta $y = x$ (Hint: use uma rotação de eixos).

13. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y do disco delimitado pela circunferência $(x-a)^2 + y^2 = b^2,\ 0 < b < a$.

8.4 Área de uma Superfície de Revolução

Antes de deduzir uma fórmula para a área de uma superfície de revolução, vamos calcular de maneira simples as áreas de duas superfícies bastante familiar: o cilindro e o cone circular reto. Para o cilindro de raio R e altura H, quando cortado e aberto, sua área lateral é calculada como se ele fosse um retângulo de altura H e base $2\pi R$, como sugere a Figura 8.38.

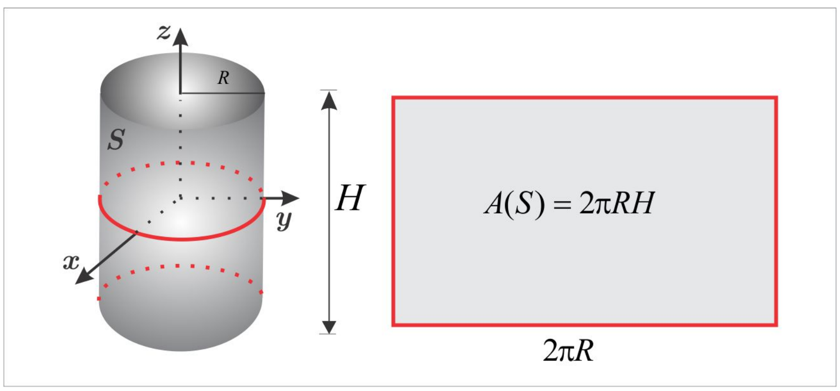


Figura 8.38: Área do Cilindro Circular Reto.

Para o cone o procedimento é análogo. Aqui usaremos a fórmula básica da área do setor circular: $A(D) = \frac{1}{2}Rs$, sendo R o raio e s o comprimento do arco. Um cone circular reto de altura H, geratriz de comprimento g e raio da base R, após cortado e aberto, se identifica com o setor circular de raio g e comprimento do arco $s = 2\pi R$, como ilustra a Figura 8.39(c).

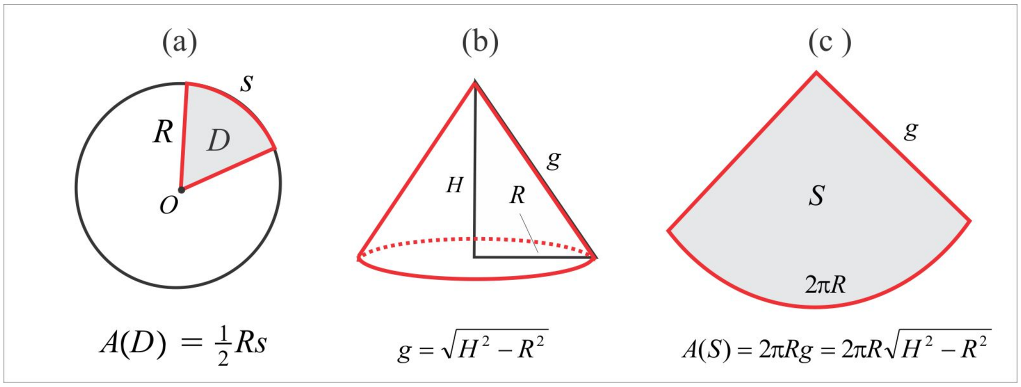


Figura 8.39: Área do Cone Circular Reto.

Em uma situação geral, suponhamos que S seja obtida por rotação, em torno do eixo Ox, do gráfico de uma *função suave* $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Por função suave entendemos um função f que é contínua e tem primeira derivada contínua no intervalo $[a, b]$. A área infinitesimal dS é aproximada pela área do cilindro de raio $f(x)$ e altura ds, sendo ds o comprimento do arco sobre o gráfico de f, como sugere a Figura 8.40.

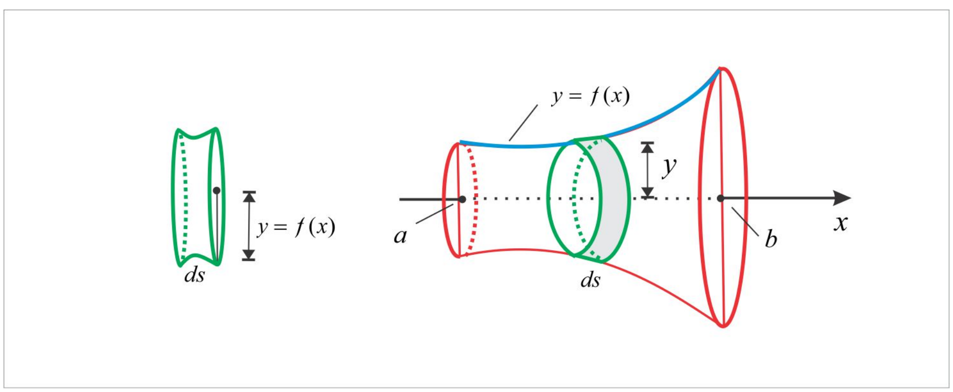


Figura 8.40: Área da Superfície S.

Temos que $dS = 2\pi f(x)\, ds$ e, como vimos em (8.1) o comprimento elementar é $ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$, e por integração encontramos a seguinte fórmula para o cálculo da área de S :

$$\boxed{\mathrm{A}(S) = \int_a^b 2\pi f(x) ds = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.} \tag{8.26}$$

EXEMPLO 8.4.1 *Como ilustração, vamos calcular a área de uma esfera de raio R. A esfera é obtida por rotação, em torno do eixo Ox, do arco de circunferência*

$$\gamma : y = \sqrt{R^2 - x^2},\ -R \le x \le R,$$

e considerando em (8.26) : $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ *e* $\sqrt{1 + f'(x)^2} = R\left(R^2 - x^2\right)^{-1/2}$, *encontramos*:

$$A(S) = \int_{-R}^{R} 2\pi R dx = 4\pi R^2.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 8.4

(click aqui e veja a lista completa)

1. Em cada caso, calcule a área da superfície S.

   (a) S é gerada pela rotação da curva $y = \sqrt{x},\ 1 \le x \le 4$, em torno do eixo x.

   (b) S é gerada pela rotação do segmento de reta $y = 3x + 2,\ 0 \le x \le 3$, em torno do eixo x.

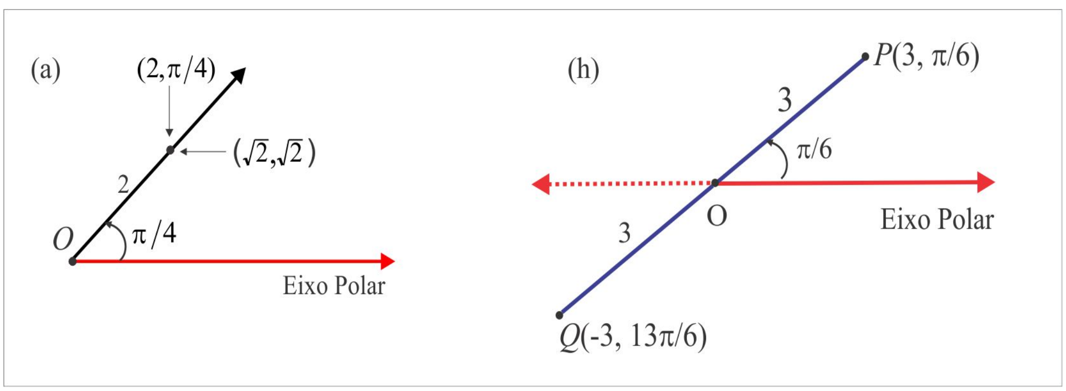
   (c) S é gerada pela rotação da curva $8x = y^4 + 2/y^2,\ 1 \le y \le 2$, em torno do eixo y.

   (d) S é o paraboloide $y = x^2 + z^2,\ 0 \le y \le 4$.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

ESCREVENDO PARA APRENDER 8.2

1. Como ilustração, veja os itens (a) e (h).



(a) $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ **(b)** $(0, -2)$ **(c)** $(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$ **(d)** $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2})$ **(e)** $(-\sqrt{3}, 1)$ **(f)** $(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

(g) $(\sqrt{3}, 2)$ **(h)** $(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-3}{2})$.

2. **(a)** $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \pi/4)$ **(b)** $(2, 0)$ **(c)** $(1, 3\pi/4)$ **(d)** $(6, \pi/3)$ **(e)** $(\sqrt{2}, 5\pi/4)$ **(f)** $(2, \pi/3)$

   (g) $(2\sqrt{3}, \pi/3)$ **(h)** $(4, -\pi/2)$.

3. **(a)** $r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 4$ **(b)** $r =$

4. **(a)** $\sqrt{x^2 + y^2} - 2xy = 2$ **(b)** $F(x, y) =$

5. Os pontos de interseção são apresentados em coordenadas polares. Localize-os no plano xy.

   (a) $A(2, \pm\pi/3)$ **(b)** $A_1(1/2, 2\pi/3)$ e $A_2(1/2, 4\pi/3)$ **(c)** $A_1(0, \pi/2)$, $A_2(0, 3\pi/2)$ e $A_3(2, \pi/4)$.

   (d) $A_1(1 + \sqrt{2}/2, \pi/4)$, $A_2(1 - \sqrt{2}/2, 3\pi/4)$, $A_3(1 - \sqrt{2}/2, 5\pi/4)$ e $A_4(1 + \sqrt{2}/2, 73\pi/4)\}$.

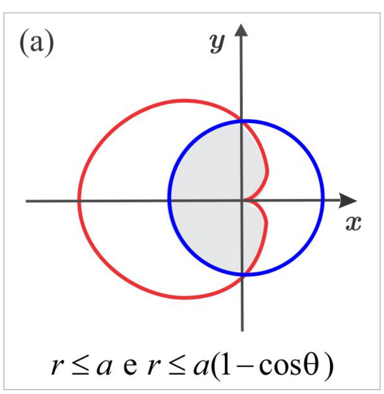
6. **(a)** $3\pi/2$ **(b)** $2\sqrt{3}$ **(c)** $2\sqrt{2} - 2$ **(d)** $\frac{\pi}{24}\sqrt{4 + \pi^2} + \frac{1}{6}\ln(\sqrt{1 + \pi^2/4} + \pi/4)$ **(e)** 2π **(f)** $3\sqrt{2}$

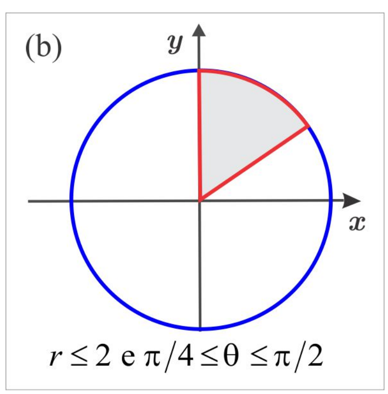
   (g) $\frac{a}{24}\left(16 + \pi^2\right)^{3/2} - 8a/3$ **(h)** $\frac{a}{8}(2\pi - 3\sqrt{3})$ **(i)** $\sqrt{2}\pi/2$.

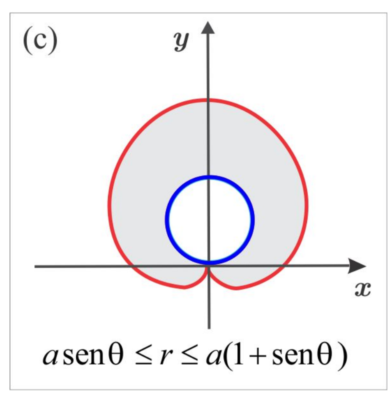
7. Veja a ilustração gráfica no final do capítulo.

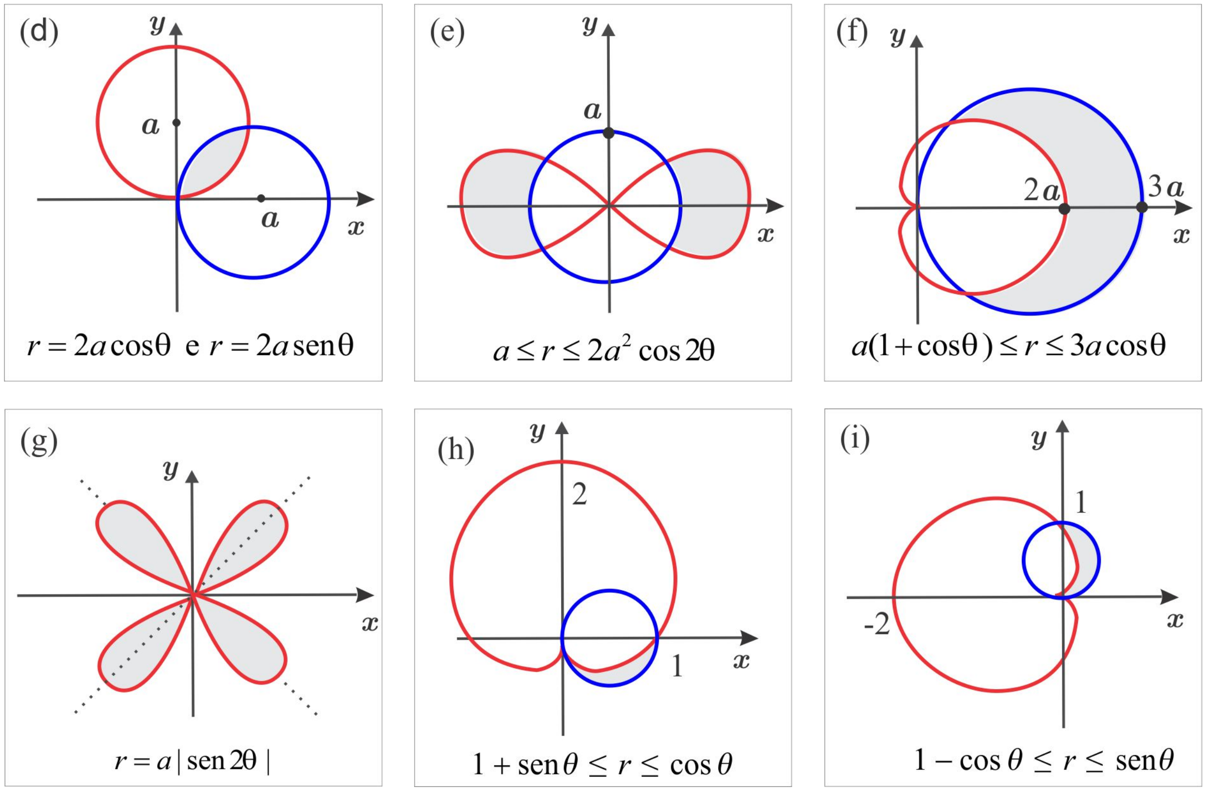
   (a) a^2 **(b)** $9\pi a^2/2$ **(c)** πa^2 **(d)** $3\pi a^2/2$ **(e)** π **(f)** $2\pi a^2$.

8. Gráficos.









ESCREVENDO PARA APRENDER 8.3

1. Em geral, a geratriz é determinada pela interseção da superfície com um plano coordenado.

   (a) geratriz: $y = \sqrt{z}$; eixo z. **(PARABOLOIDE)**

   (b) geratriz: $y = \sqrt{x}$; eixo x. **(PARABOLOIDE)**

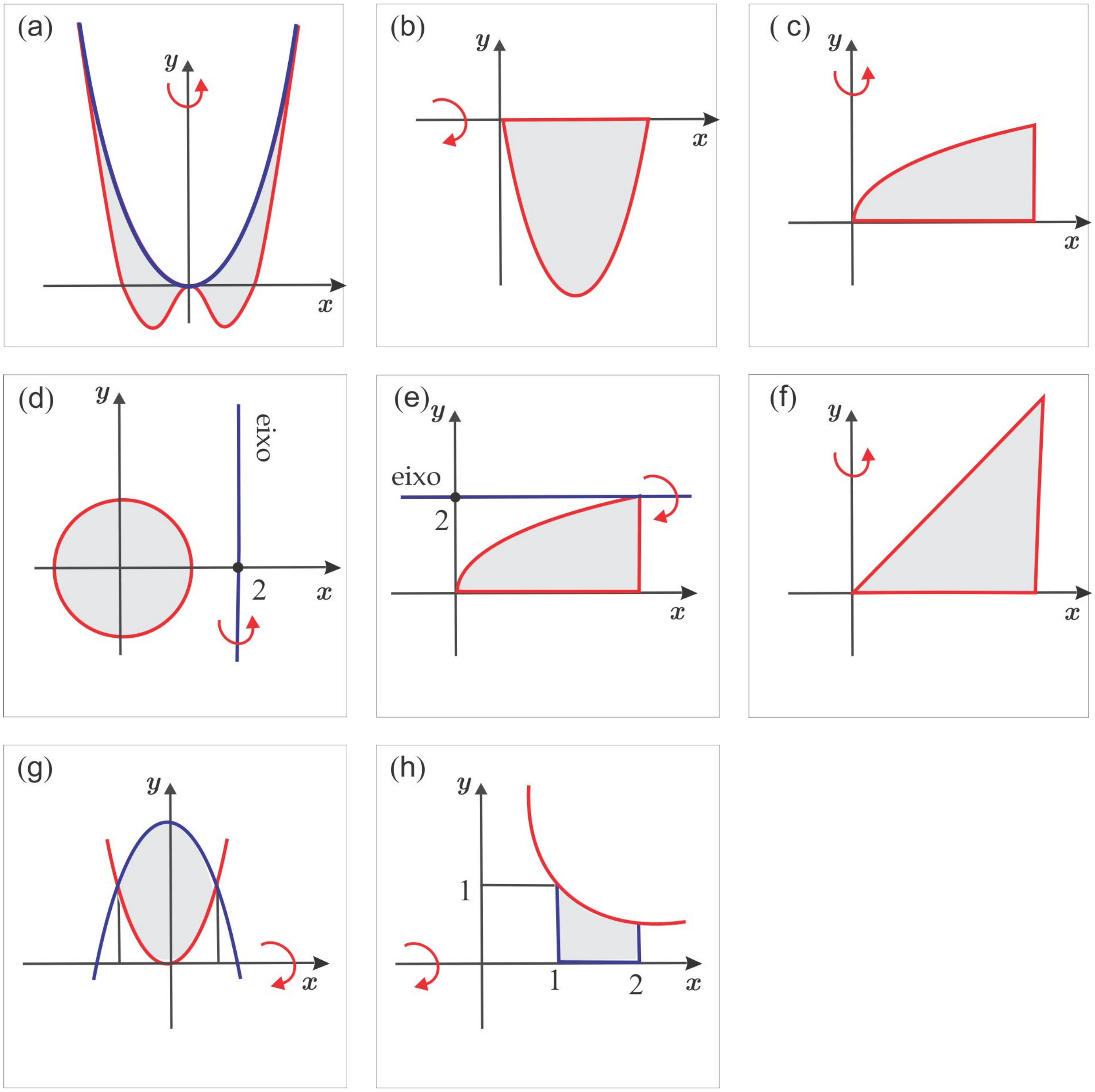
   (c) geratriz: $y = x$; eixo y. **(CONE)**

   (d) geratriz: $x^2 + y^2 = a^2$; eixo x. **(ESFERA)**

   (e) geratriz: $x = 1$; eixo y. **(CILINDRO)**

   (f) geratriz: $9y^2 - z^2 + 36$; eixo z. **(HIPERBOLOIDE)**

2. Em cada figura abaixo apresenta-se o gráfico da região que irá produzir o sólido.



(a) $V = 32\pi/3$ **(b)** $V = 512\pi/15$ **(c)** $V = 256\pi/15$ **(d)** $V = 4\pi^2$

(e) $V = 40\pi/3$ **(f)** $V = 16\pi/3$ **(g)** $V = (30.1)\,\pi/2$ **(h)** $V = \pi/2$.

3. $\mathrm{vol}\,(\Omega) = \pi r^2 h/3$. Se a rotação fosse em torno do eixo Oy, o volume do corpo seria $2\pi r h^2/3$.

4. $\mathrm{vol}\,(\Omega) = 13\pi/6$.

5. **(a)** $\pi/4$ **(b)** $3\pi/7$ **(c)** $11\pi/20$ **(d)** $27\pi/35$.

6. O corpo Ω é gerado pela rotação da região D em torno do eixo indicado.

(a) $D = R_1 \cup R_2$; eixo Ox.

(b) $D = R_3$; eixo Oy.

(c) $D = R_3$; eixo Ox.

(d) $D = R_1$; eixo Ox.

(e) $D = R_1 \cup R_2$; eixo Ox.

(f) $D = R_3$; eixo Ox.

7. $\mathrm{vol}\,(\Omega) = 224\pi/3$.

8. $\mathrm{vol}\,(\Omega) = \pi h/3\left(R^2 + r^2 + rR\right)$.

9. $\mathrm{vol}\,(\Omega) = 2\pi h R^3/3 + \pi h^3/3 - \pi r^2 h$.

10. Usando fatias, encontramos:

$$\mathrm{vol}\,(\Omega) = \pi \int_0^2 \left(-x^2 + 2x\right)^2 dx = 16\pi/15.$$

Por outro lado, usando cascas cilíndricas, obtemos:

$$\mathrm{vol}\,(\Omega) = 2\pi \int_0^1 2y\sqrt{1-y}\; dy = 4\pi \int_0^1 (1-t)\sqrt{t}\; dt = 16\pi/15.$$

11. A região D é delimitada pelo eixo Oy e pelos gráficos de $y = \cos x$ e $y = \operatorname{sen} x$, entre $x = 0$ e $x = \pi/4$. O volume do corpo Ω é:

$$\mathrm{vol}\,(\Omega) = \frac{1}{2}\left(\pi^2\sqrt{2} - 4\pi\right).$$

12. $\mathrm{vol}\,(\Omega) = \dfrac{43\pi\sqrt{2}}{27}$.

13. O sólido Ω tem o formato de uma *rosquinha* e seu nome é *Toro de Revolução*. Temos:

$$\mathrm{vol}\,(\Omega) = ab^2\pi^2 + \frac{4\pi b^3}{3}.$$

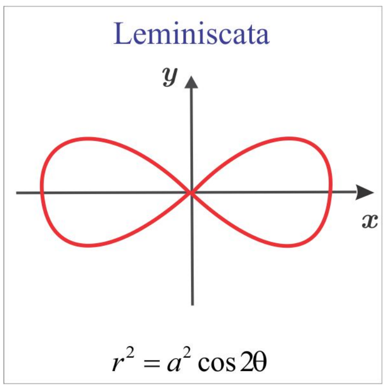
ESCREVENDO PARA APRENDER 8.4

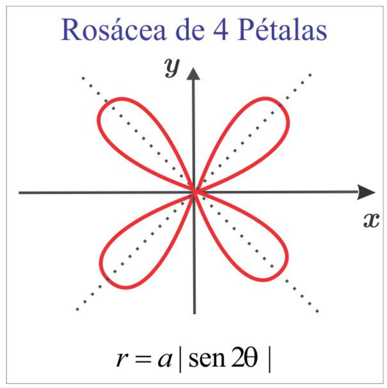
1. **(a)** $A\,(S) = \frac{4\pi}{3}\{(17/4)^{3/2} - (5/4)^{3/2}] \simeq 36.18$ **(b)** $A\,(S) = 39\pi\sqrt{10}$ **(c)** $A\,(S) = 1179\pi/256$.

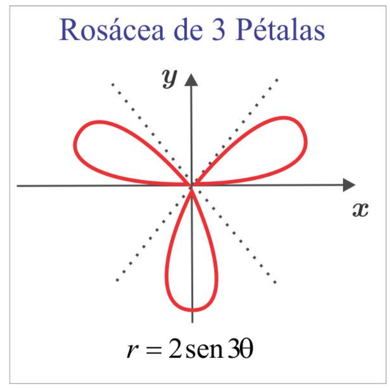
(d) $A(S) = \frac{4\pi}{3}\{(17/4)^{3/2} - 1/3] \simeq 36.18.$

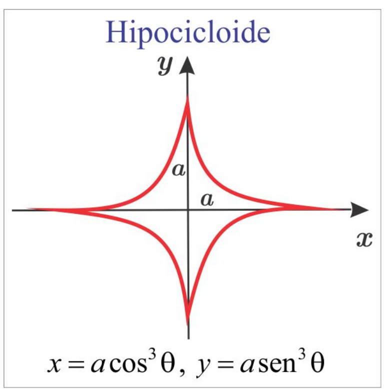
ALGUMAS CURVAS ESPECIAIS EM COORDENADAS POLARES

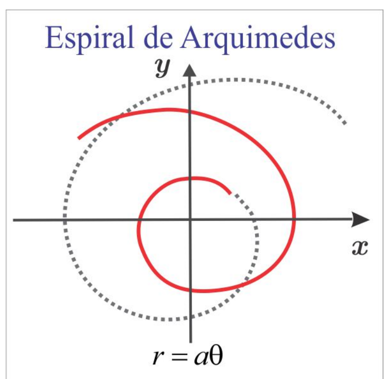
As curvas em coordenadas polares que aparecem com mais freqüência são apresentadas abaixo, com as respectivas equações. Acompanhe a figura com os valores de $\theta : 0,\ \pi/6,\ \pi/4,\ \pi/3,\ \pi,\ 3\pi/2,\ $ e 2π.

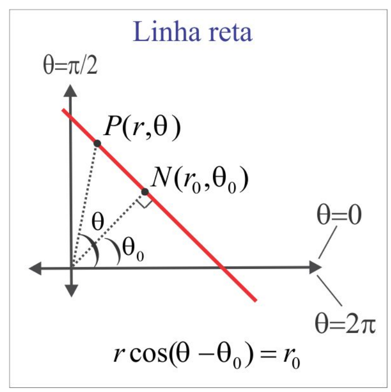


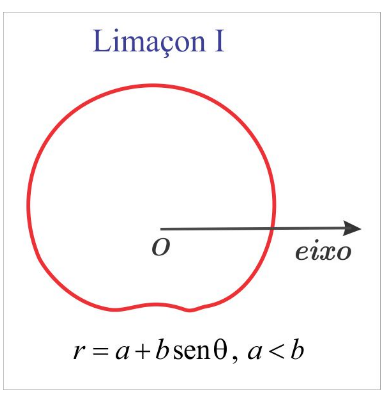


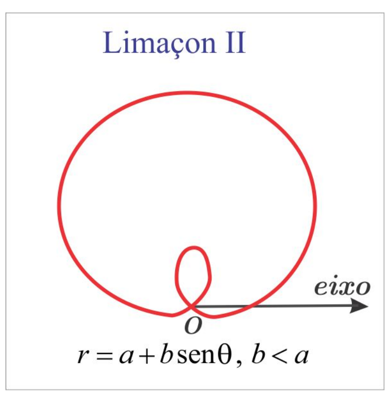


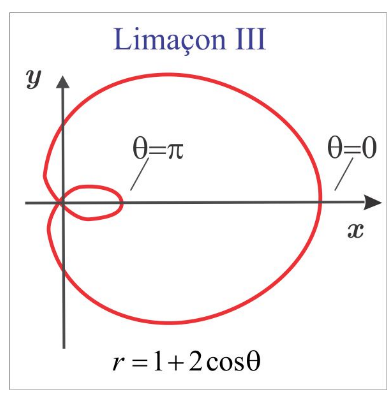


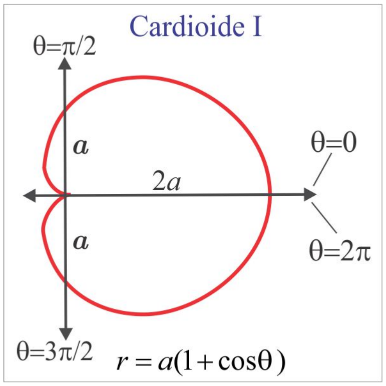


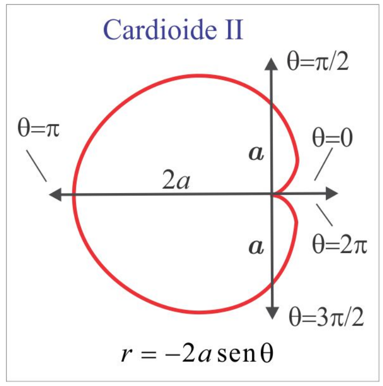


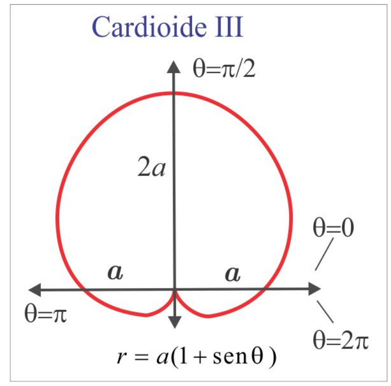


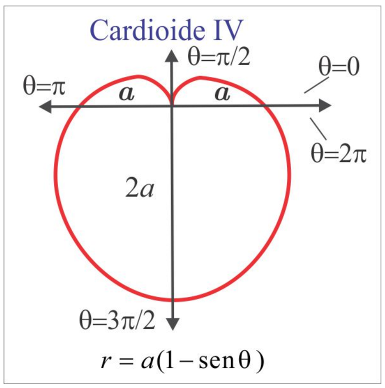


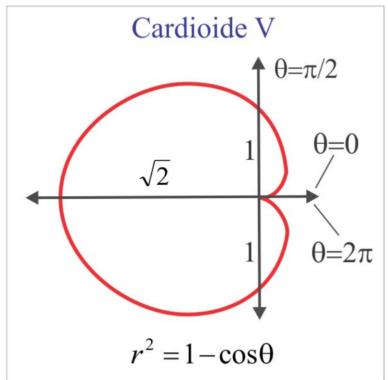


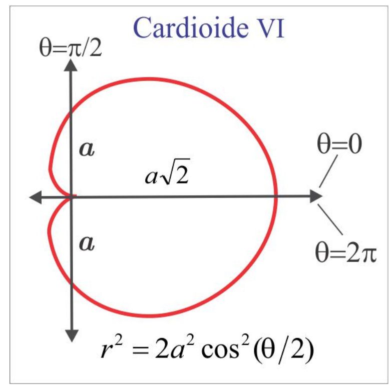

Cardioide I
θ=π/2
a
2a
θ=0
a
θ=2π
θ=3π/2
r = a(1+cosθ)

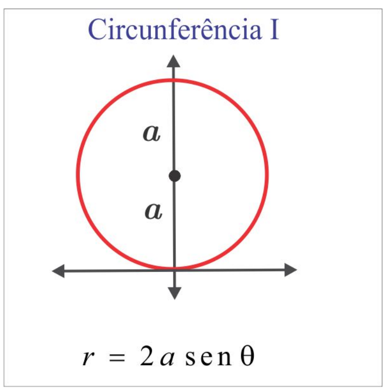

Cardioide II
θ=π/2
θ=π
a
θ=0
2a
a
θ=2π
θ=3π/2
r = −2a senθ

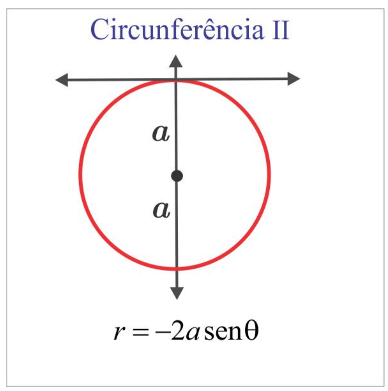

Cardioide III
θ=π/2
2a
θ=0
a
a
θ=π
θ=2π
r = a(1 + senθ)

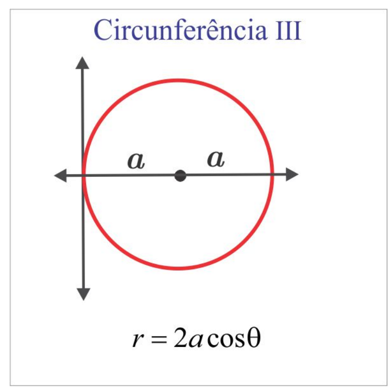

Cardioide IV
θ=π/2
θ=π
a
a
θ=0
θ=2π
2a
θ=3π/2
r = a(1 − senθ)

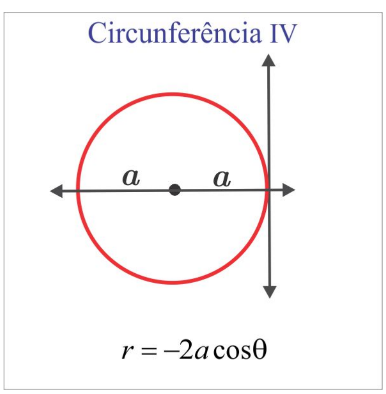

Cardioide V
θ=π/2
1
θ=0
√2
1
θ=2π
r² = 1 − cosθ

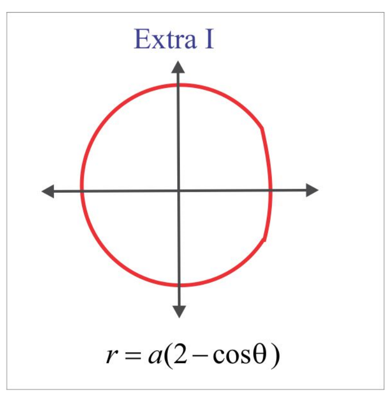

Cardioide VI
θ=π/2
a
a√2
θ=0
a
θ=2π
r² = 2a² cos²(θ/2)

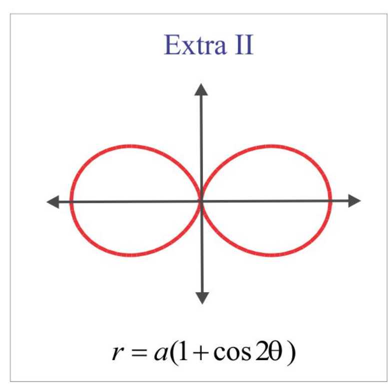

Circunferência I
a
a
r = 2a senθ


Circunferência II
a
a
r = −2a senθ


Circunferência III
a
a
r = 2a cosθ


Circunferência IV
a
a
r = −2a cosθ


Extra I
r = a(2 − cosθ)


Extra II
r = a(1 + cos2θ)

"A mathematician is one to whom $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}$
is as obvious as that twice two makes four is to you.
Liouville was a mathematician."

Lord Kelvin

```
\begin{figure}[!htb]
\begin{minipage}[b]{0.40\linewidth}
\includegraphics[width=\linewidth]{graphics/Figura8_11.jpg}
\caption{Exercício 6}
\label{fig7.k}
\end{minipage}\hfill
\begin{minipage}[b]{0.40\linewidth}
\includegraphics[width=\linewidth]{graphics/Figura8_11.jpg}
\caption{Exercício 6}
\label{fig7.kk}
\end{minipage}
\end{figure}
```

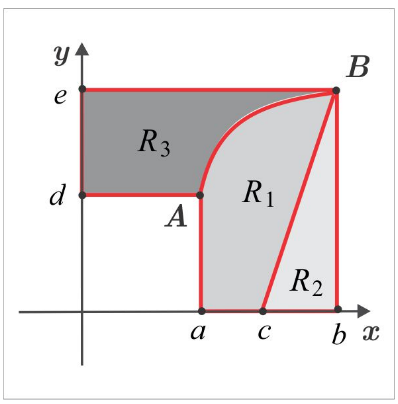


Figura 8.41: Exercício 6

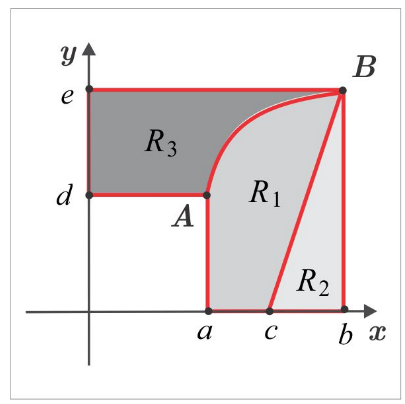


Figura 8.42: Exercício 6

```
\begin{wrapfigure}[6]{r}{5cm}
\centering
\includegraphics[width=5cm]{graphics/Figura8_11.jpg}
\caption{Exercício 6}
\label{fig7.k}
\end{wrapminipage}
```

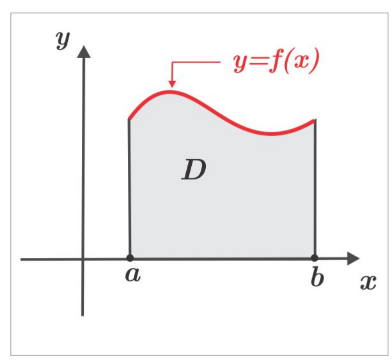


Figura 8.43: Área da região D