# Feuille d'exercices n° 2 - Vecteurs et géométrie vectorielle

Dans cette feuille, on munit le plan (resp. l'espace) d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (resp. $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$) et on exprime les coordonnées dans ce repère.

## Vecteurs du plan

**Exercice 1.** On considère la droite $\mathcal{D}$ du plan passant par les points $A(5,3)$ et $B(-1,0)$.

1. Déterminer un vecteur directeur ainsi qu'une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.
2. Écrire une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.
3. Soit $M$ le point du plan de coordonnées $(0,3)$.
   (a) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal $H$ de $M$ sur $\mathcal{D}$.
   (b) Quelle est la distance entre $M$ et $\mathcal{D}$ ?
4. Calculer l'aire du triangle $ABM$.
5. En plus d'être rectangle, quelle propriété a le triangle $BHM$ ?

**Exercice 2.** On considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = \frac{3}{5}\overrightarrow{\imath} + \frac{4}{5}\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{v} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{\imath} + \frac{3}{5}\overrightarrow{\jmath}$.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une base orthonormée du plan.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

**Exercice 3.** Jean se trouve dans un champ bordé par une rivière supposée rectiligne. Jean est au point $J$ de coordonnées $(2,4)$ et la rivière passe par les points $A(1,-1)$ et $B(5,2)$. Jean veut aller se baigner dans la rivière et s'y rend au plus court (l'unité de longueur est l'hectomètre).

1. Déterminer les coordonnées du point de baignade de Jean.
2. Quelle distance a-t-il parcourue pour aller se baigner ?

## Vecteurs de l'espace

**Exercice 4.** Soit $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$.

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Sont-ils orthogonaux ? Justifier.
2. Déterminer un vecteur unitaire (c'est-à-dire de norme 1) et colinéaire à $\overrightarrow{u}$ (resp. $\overrightarrow{v}$). Combien y a-t-il de choix pour chacun d'eux ?
3. Donner une équation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A$ de coordonnées $(1,0,3)$ et de base vectorielle $(\vec{u}, \vec{v})$.
4. Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $x - y - z + 2 = 0$.
5. Calculer la distance du point $M$ de coordonnées $(1,1,-1)$ au plan $\mathcal{P}$.
6. Quelles sont les coordonnées du projeté orthogonal de $M$ sur $\mathcal{P}$ ?

**Exercice 5.** En l'absence de champ électrostatique, la force de Lorentz pour une particule de charge $q$ et de vitesse $\overrightarrow{v}$ dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ s'exprime par : $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{B}$ dans la base orthonormée $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, sachant que ses deux premières coordonnées sont égales, lorsque $q = 2$, $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{\imath} + 4\overrightarrow{\jmath} + 6\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{F} = 4\overrightarrow{\imath} - 20\overrightarrow{\jmath} + 12\overrightarrow{k}$.

**Exercice 6.** Soient quatre points $M(1,-1,2)$, $A(2,1,0)$, $B(-1,1,1)$ et $C(0,2,1)$.

1. Montrer que les points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par $A$, $B$ et $C$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $M$ sur le plan $\mathcal{P}$.
4. Calculer la distance de $M$ à $\mathcal{P}$.
5. Donner une équation paramétrique, puis un système d'équations cartésiennes, de la droite $(AB)$.
6. Déterminer le projeté orthogonal de $M$ sur la droite $(AB)$.

## Exercices complémentaires

**Exercice 7.** Soit $a$ un nombre réel non nul et $f$ la fonction définie par $f(x) = e^{ax}$. Soit $M$ un point de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de $f$ d'abscisse $x_0$.

1. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point $M$.
2. Le point $M$ se projette orthogonalement sur l'axe des abscisses en un point $H$. On note $C$ le point d'intersection de $\mathcal{T}$ avec l'axe des abscisses.
   (a) Illustrer la situation sur un dessin.
   (b) Montrer que la distance $HC$ ne dépend pas du point $M$ choisi.

**Exercice 8.** On considère les deux droites de l'espace suivantes :

$$\mathcal{D} : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+5y+z & = & 9 \\ x+3y+2z & = & 5 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+3y-3z & = & 7 \\ x+2y-z & = & 5 \end{array} \right. .$$

1. Trouver un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{D}$ et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}'$ de $\mathcal{D}'$.
2. Trouver un point $A$ de $\mathcal{D}$ et un point $A'$ de $\mathcal{D}'$.
3. Montrer que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont disjointes.

**Exercice 9** (Extrait de l'examen terminal seconde session 2018-2019)**.** Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les points $A$ de coordonnées $(0,1,-1)$, $B$ de coordonnées $(-1,1,1)$, $C$ de coordonnées $(1,2,-2)$ et $D$ de coordonnées $(-2,-1,-2)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Les points $A$, $B$ et $C$ sont-ils alignés ?
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par $A$, $B$ et $C$.
3. Déterminer le projeté orthogonal du point $D$ sur le plan $\mathcal{P}$.
4. Donner une équation paramétrique de la droite $(AB)$.
5. Donner un système d'équations cartésiennes de la droite $(AB)$.
6. Justifier que la distance du point $D$ à la droite $(AB)$ vaut $\|\overrightarrow{AD}\|$. Calculer cette distance.