Math II
Licence Physique - Chimie
Chapitre 1 (partie II) : Fonctions de plusieurs variables

Térence Bayen

Université d'Avignon

terence.bayen@univ-avignon.fr

Objectifs du chapitre

- Savoir donner le domaine de définition d'une fonction de plusieurs variables
- Savoir calculer des dérivées partielles et résoudre des équations simples
- Savoir calculer des incertitudes à l'aide de la notion de différentielle (voir les CC des années passées)

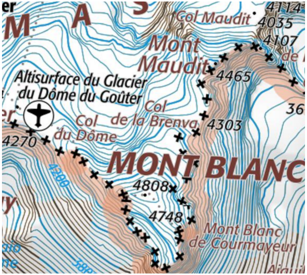
Définition d'une fonction de plusieurs variables

Définition

Soit $n, m \geq 1$ et $D \subset \mathbb{R}^n$. On appelle *fonction de n variables* une application :

$$f : D \to \mathbb{R}^m$$
$$x = (x_1, ..., x_n) \mapsto f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$$

Exemples : température $T(x_1, x_2, x_3, t)$, pression, force de gravitation, $\rho(x, t)$: densité d'infectés en x à la date t, altitude...



Surface de niveau : sur chaque courbe, l'altitude est constante $h(x, y) = ctse_z$

Notion d'ensemble ouvert (à sauter en première lecture)

On va préciser le domaine de définition de f.

Notion d'ensemble ouvert (à sauter en première lecture)

On va préciser le domaine de définition de f.

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier. On appelle distance entre deux points $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ la quantité :

$$d(X, Y) = \|Y - X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}.$$

Si $n = 2$: $D(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

Définition

Si $\rho > 0$ et $X_0 \in \mathbb{R}^n$, la boule ouverte de centre X_0 et de rayon ρ est :

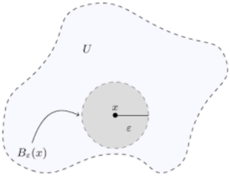
$$B(X_0, \rho) = \{X \in \mathbb{R}^n ; d(X, X_0) < \rho\}.$$

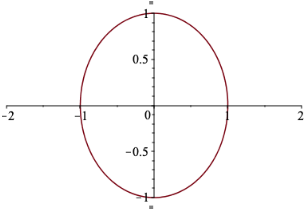
Notion d'ensemble ouvert (à sauter en première lecture)

Définition

Une partie Ω de $\mathbb{R}^n$ est dite ouverte si en chaque point X_0 de Ω, il existe une boule ouverte $B(X_0, \rho)$ centrée en X_0 contenue dans Ω.

En termes plus imagés, dans un ouvert, il y a un peu d'espace autour de chaque point.





(fig. droite: la droite n'est pas ouverte).

1. pour $d = 1$, les intervalles ouverts sont des ouverts de $\mathbb{R}$;

2. un produit (cartésien) d'ouverts est un ouvert; ainsi, un rectangle $]a, b[\times]c, d[$ de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert; une réunion d'ouverts est aussi un ouvert; une intersection finie d'ouverts est un ouvert;

3. une droite de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$: elle ne contient aucune boule ouverte.

Définition sur un ouvert

Il est plus rigoureux de définir une fonction de plusieurs variables sur un ouvert (même si on ne fera pas forcément trop attention à ce point là dans la suite)...

Définition

Soit $n, m \geq 1$ et $D \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert. On appelle *fonction de n variables* une application :

$$f : D \to \mathbb{R}^m$$
$$x = (x_1, ..., x_n) \mapsto f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$$

Continuité

Définition

Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur une partie U de $\mathbb{R}^d$; soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $\ell \in \mathbb{R}^n$; on dit que f admet ℓ comme limite en x_0 et on écrit :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x_0} f = \ell$$

si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in U, \|x - x_0\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon.$$

Quand $x_0 \in U$, on a automatiquement que $f(x_0) = \ell$ et on dit que f est continue en x_0.

Remarque

Dans la pratique, on ne se servira JAMAIS de cette définition, utilisant comme pour les fonctions d'une variables réelles la connaissance de limites classiques et les règles usuelles de calcul : somme de limites, composée de limites,... En particulier, une somme, une composée de fonctions continues est continue... Les polynômes en des fonctions continues sont continues.

Exemples

Exemple

Les polynômes (de plusieurs variables), les fonctions exp, ln, cos, sin, $\sqrt{\ }$, ... sont des fonctions continues. On en déduit par exemple que les fonction

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 - \ln(1+x+y)\ ;\ f_2(x,y) = \sin(x^2+y^2)$$

$$f_3(x,y,z) = \cos\Big(\exp(x+y^3-\cos z) + xz - \ln y\Big)\ ;\ f_4(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

Quantités physiques:

$$U(R,I) = RI\ ;\ P(n,R,T,V) = nRT/V\ ;\ v(G,M,R) = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

sont continues sur leur ensemble de définition (ouvert).

⇒ vous devez donc à chaque fois déterminer le domaine de définition (ouvert).

Dérivée partielle

Définition

On suppose que $n = 3$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction de trois variables ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ouvert). Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$. On dit que f admet en M_0 une dérivée partielle par rapport à x si la fonction φ définie par $\varphi(x) = f(x, y_0, z_0)$ est dérivable en $x = x_0$. Cette dérivée partielle est alors notée :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \varphi'(x_0).$$

De même, f admet une dérivée partielle par rapport à y en M_0 si, quand x et z sont fixés égaux à x_0 et z_0, la fonction $(y \to f(x_0, y, z_0))$ admet une dérivée en y_0. Donc

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{z - z_0}(f(x_0, y_0, z) - f(x_0, y_0, z_0)).$$

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

se calcule en dérivant f par rapport à x (y jouant le rôle de constante). Et de même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Remarque

En pratique, l'étudiant qui sait calculer une dérivée sait calculer une dérivée partielle, puisqu'il s'agit juste d'un calcul de dérivée **EN GELANT LES AUTRES VARIABLES**:

- $\frac{\partial xy^2}{\partial x} = y^2 \quad ; \quad \frac{\partial xy^2}{\partial y} = 2xy \quad ; \quad \frac{\partial xy^2}{\partial z} = 0;$
- $\frac{\partial \ln(x^2+y^4)}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^4} \quad ; \quad \frac{\partial \ln(x^2+y^4)}{\partial y} = \frac{4y^3}{x^2+y^4}$
- si $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$, alors pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{-2x}{(x^2+y^2+z^2)^2} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{(x^2+y^2+z^2)^2} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

- Si $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1, la fonction

$$f(x,y) := g(x) + h(y)$$

vérifie

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g'(x) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = h'(y)$$

Propriétés

- Une combinaison linéaire de fonctions qui admettent des dérivées partielles admet elle aussi des dérivées partielles, et celles-ci sont combinaisons linéaires des dérivées partielles des fonctions considérées.
- Une composée, un produit de fonctions admettant des dérivées partielle admet elle aussi des dérivées partielles.
- **Somme et produit.** Soient f et g des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies sur un même ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ telles qu'au point $a \in \Omega$, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ et $\frac{\partial g}{\partial x_k}(a)$ existent. On a alors.

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \frac{\partial g}{\partial x_k}(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial(fg)}{\partial x_k}(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\right) g(a) + f(a)\left(\frac{\partial g}{\partial x_k}(a)\right).$$

Définition

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction de d variables. On dit qu'elle est *de classe C^1* si elle admet des dérivées partielles suivant toutes ses variables et si ces dérivées partielles sont continues.

Exemple

On reprend l'exemple précédent $f(x,y,z) = xy^2$. Notez que f est défini sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$. On a vu que f admet pour dérivées partielles les trois fonctions :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2xy; \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0.$$

Ces trois fonctions, qui sont des polynômes, sont continues; la fonction f est donc de classe C^1.

Dérivées partielles secondes

Définition

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction de d variables. On dit que f admet des dérivées partielles secondes sur Ω si elle admet des dérivées partielles sur Ω et si ces dérivées partielles elles-mêmes admettent des dérivées partielles sur Ω. On écrit alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

On appelle fonction de classe C^2 un fonction admettant des dérivées partielles secondes qui sont continues.

Exemples

$$f(x,y) = x^4 + y^2$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

$$f(x,y,z) = x^2y^3 + \sin(xy)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y^3 - y^2\sin(xy) \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6x^2y - x^2\sin(xy)$$

Exemples (suite) avec le potentiel de pesanteur

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{r(x,y,z)} \quad r = r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -xr(x,y,z)^3 \;;\; \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -yr(x,y,z)^3 \;;\; \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -zr(x,y,z)^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = -\frac{1}{r^3} - x(-3/2)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(2x) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5} \;;\; \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}$$

Conclusion :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 0$$

Théorème de Schwarz

Théorème

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *une application de classe* C^2*, alors :*

$$\forall M \in \Omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M).$$

Bref : ON PEUT CALCULER LES DERIVEES PARTIELLES SECONDES DANS N'IMPORTE QUELLE ORDRE

Si $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1, la fonction

$$f(x,y) := g(x) + h(y)$$

vérifie

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g'(x) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = h'(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = g''(x) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = h''(y) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$$

Exemple

$$f(x,y) = \sin(x^2y^3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3\cos(x^2y^3)\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2x^2\cos(x^2y^3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -2xy^3 \times 3x^2y^2\sin(x^2y^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = -3y^2x^2 \times 2xy^3\sin(x^2y^3)$$

et ces deux quantités sont bien égales (ouf, d'après le Thm. précédent).

$\Rightarrow$ Notations à deux et trois variables :

$$\frac{\partial}{\partial x \partial y}\ ;\ \frac{\partial}{\partial x \partial z}\ ;\ \frac{\partial}{\partial x \partial y \partial z}$$

Différentielle

Définition

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Soit $X_0 \in \Omega$. Si il existe $r > 0$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon : B(0,r) \to \mathbb{R}$, continue et nulle en 0 t.q.

$$\forall H = (h_1, \ldots, h_n) \in B(0,r), f(X_0 + H) = f(X_0) + h_1 a_1 + \cdots + h_n a_n + \|h\| \varepsilon(h),$$

on dit que l'application f est différentiable en X_0. L'application $Df(X_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$Df(X_0)(h_1, \ldots, h_n) = h_1 a_1 + \cdots + h_n a_n$$

s'appelle alors la différentielle de f en X_0.

Différentielle

Définition

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Soit $X_0 \in \Omega$. Si il existe $r > 0$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon : B(0,r) \to \mathbb{R}$, continue et nulle en 0 t.q.

$$\forall H = (h_1, \ldots, h_n) \in B(0,r), f(X_0 + H) = f(X_0) + h_1 a_1 + \cdots + h_n a_n + \|h\|\varepsilon(h),$$

on dit que l'application f est différentiable en X_0. L'application $Df(X_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$Df(X_0)(h_1, \ldots, h_n) = h_1 a_1 + \cdots + h_n a_n$$

s'appelle alors la différentielle de f en X_0.

Théorème

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Soit $X_0 \in \Omega$. Alors f est différentiable en X_0 et la différentielle de f en X_0 est

$$\begin{aligned} Df(X_0) &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (h_1, ..., h_n) &\mapsto Df(X_0)(h_1, \ldots, h_n) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) + \cdots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \end{aligned}$$

Différentielle

Remarque

De manière équivalente

$$Df(X_0)(h_1,\dots,h_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)\right).\begin{pmatrix} h_1 \\ . \\ . \\ . \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Différentielle dans $\mathbb{R}^2$: (RETENIR LA MISE EN PLACE)

- Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1,

$$Df(x_0, y_0)(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2$$

- Exemple : $f(x, y) = xy^2$. On a alors

$$Df(x_0, y_0)(h_1, h_2) = y_0^2 h_1 + 2x_0 y_0 h_2.$$

Différentielle dans $\mathbb{R}^3$ (RETENIR LA MISE EN PLACE)

- Pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1,

$$Df(x_0,y_0,z_0)(h_1,h_2,h_3) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)h_3$$

- Exemple : Volume : $V(x,y,z) = xyz \Rightarrow$

$$DV(x_0,y_0,z_0)(h_1,h_2,h_3) = y_0z_0h_1 + x_0z_0h_2 + x_0y_0h_3$$

Autre exemple détaillé

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application de classe C^1 définie par:

$$f(x,y) = x^3 + xy^5 - \cos(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + y^5 + y\sin(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 5xy^4 + x\sin(xy)$$

$$\begin{aligned} Df(x,y)(h_1,h_2) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)h_2 \\ &= [3x^2 + y^5 + y\sin(xy)]h_1 + [5xy^4 + x\sin(xy)]h_2 \end{aligned}$$

Exemples / Exercices

En physique, $h_1, h_2, ...$ est un petit accroissement et peut être noté Δx, Δy,...

Exercice

Calculer la différentielle des grandeurs physiques suivantes : période d'un pendule, loi d'ohm ; vitesse moyenne des particules d'un fluide à température T.

$$T = T(g, l) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \; ; \; U = RI \; ; \; v(T, k, m) = \sqrt{8kTm}.$$

Exemples / Exercices

En physique, $h_1, h_2, \ldots$ est un petit accroissement et peut être noté Δx, Δy,...

Exercice

Calculer la différentielle des grandeurs physiques suivantes : période d'un pendule, loi d'ohm ; vitesse moyenne des particules d'un fluide à température T.

$$T = T(g,l) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ ;\ U = RI\ ;\ v(T,k,m) = \sqrt{8kTm}.$$

$$DT(g,l)(\Delta g, \Delta l) = 2\pi\left[\sqrt{l}\left(-\frac{1}{2}\right)g^{-3/2}\Delta g + \frac{1}{2\sqrt{gl}}\Delta l\right]$$

$$DU(R,I)(\Delta R, \Delta I) = I\Delta R + R\Delta I$$

$$Dv(T,k,m)(\Delta T, \Delta k, \Delta m) = \sqrt{8}\left[\frac{\sqrt{km}}{2\sqrt{T}}\Delta T + \frac{\sqrt{Tm}}{2\sqrt{k}}\Delta k + \frac{\sqrt{kT}}{2\sqrt{m}}\Delta m\right]$$

Matrice jacobienne

Le CC ne portera pas sur ces concepts (jacobienne).
Par contre, il faut savoir calculer les incertitudes (fin du pdf)

Définition

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1. Notons $f_1, \ldots, f_n$ les fonctions coordonnées de f, de sorte qu'on a $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ pour $x \in \Omega$. La différentielle de f en X_0 est l'application $Df(X_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ définie par

$$Df(X_0)(H) = (Df_1(X_0)(H), \ldots, Df_n(X_0)(H)).$$

Définition

On appelle matrice jacobienne de f au point X_0 la matrice à p lignes et n colonne où le coefficient à l'intersection de la i-ème ligne et la j-ième colonne est $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0)$. Cette matrice se note $J_f(X_0)$.

On a alors $Df(X_0)(H) = J_f(X_0).\begin{pmatrix} h_1 \\ . \\ . \\ . \\ h_d \end{pmatrix}$.

Propriétés

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i Df_i.$$

- Si $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ est ouvert et $f:\Omega\to\mathbb{R}$ est de classe C^1, alors pour tout $(x_1,x_2)\in\Omega$, on a

$$J_f(x,y))=(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y));$$

- Pour toute fonction $\gamma:t\mapsto(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$ de classe C^1, on a

$$J_\gamma(t)=\begin{pmatrix}\gamma_1'(t)\\ \gamma_2'(t)\end{pmatrix};$$

- Supposons que $f:(x,y)\mapsto(f_1(x,y),f_2(x,y))$ soit de classe C^1. Alors

$$J_f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}.$$

Composition (utile pour les Hamiltoniens)

Proposition

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $H : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et $(t \in I \to X(t) = (X_1(t), \dots, X_d(t)) \in \Omega)$ une fonction dérivable sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors la fonction $t \to H(X(t))$ est dérivable sur I, et

$$\forall t \in I, \quad \frac{d}{dt}(H(X(t))) = DH(X(t))X'(t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial H}{\partial x_i}(X(t)) \frac{dX_i}{dt}(t).$$

Proposition

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^1. Soit $\Omega' \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert et $g : \Omega' \to \mathbb{R}^q$ une application de classe C^1. Si $f(\Omega) \subset \Omega'$, alors $g \circ f$ est de classe C^1 et

$$\forall X_0 \in \Omega, \quad J_{g \circ f}(X_0) = J_g(f(X_0)).J_f(X_0).$$

Remarque

L'égalité $J_{g \circ f}(X_0) = J_g(f(X_0)).J_f(X_0)$ ressemble à la formule $(g \circ f)'(X_0) = g'(f(X_0))f'(X_0)$

Extrema

Proposition

Soit $f\ :\Omega\to\mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1 *de* n *variables et* X_0 *un extremum local de* f*, c-à-d tel qu'il existe une boule* $B(X_0,\rho)$ *centrée en* X_0 *incluse dans* Ω *t.q.:*

- *soit :* $\forall X\in B(X_0,\rho); f(X)\leq f(X_0)$ *(on a alors un maximum local);*
- *soit :* $\forall X\in B(X_0,\rho); f(X)\geq f(X_0)$ *(on a alors un minimum local);*

alors on a : $Df(X_0)=0$*, c-à -d :*

$$\forall i=1,\dots,n, \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)=0.$$

Erreur absolue / erreur relative

Cette section doit être sue et maîtrisée. Pratiquer bien la feuille d'exercice. On fournit une méthode pour calculer une incertitude en physique. Le point de départ est que le résultat d'une mesure n'est jamais exact.

Définition

(i) L'erreur absolue commise est la valeur absolue de la différence entre la valeur mesurée V_m et la valeur exacte (mais inconnue) V_e et s'exprime donc avec l'unité correspondant à la grandeur.

$$\Delta V = |V_m - V_e|$$

(ii) L'erreur relative est le quotient de l'erreur absolue par la valeur exacte (sans unité):

$$\frac{\Delta V}{V_e}.$$

Définition

L'erreur absolue étant inconnue, il existe certaines méthodes qui permettent de trouver un majorant I_V de cette erreur. Ce majorant s'appelle incertitude absolue. On lui préfère en général l'incertitude relative ou la précision qui est un majorant de l'erreur relative $\frac{\Delta V}{V}$.

La méthode à savoir

<u>But</u> : connaître l'erreur relative sur $f(X_0)$. Par la différentielle, une “bonne approximation” de l'erreur $\|f(X) - f(X_0)\|$ est

$$|Df(X_0)(X - X_0)|$$

Définition

(i) On identifiera l'erreur absolue à

$$|Df(X_0)(X - X_0)|.$$

(ii) On identifiera l'erreur relative à

$$\frac{|Df(X_0)(X - X_0)|}{f(X_0)}.$$

FORMULE A SAVOIR APPLIQUER : ERREUR RELATIVE$=$

$$\frac{Df(X_0)(\Delta X)}{f(X_0)}$$

Ce n'est pas très rigoureux

Le théorème de Taylor sur le DL à l'ordre 1:

$$f(X) = f(X_0) + Df(X_0)(X - X_0) + o(\|X - X_0\|)$$

permet de comprendre pourquoi il est naturel de faire ceci. Mathématiquement, ce n'est pas rigoureux et il existe des méthodes plus fines qui donnent des majorations exactes de l'erreur (ce sont des méthodes qui utilisent un analogue de l'inégalité des accroissements finis). Ce n'ést pas le but du cours : on se contente de l'approximation de l'erreur à l'aide de la différentielle.

Exemple : volume du cône

$$V = V(\delta, h) = \frac{\pi}{12}\delta^2 h.$$

On suppose connue les incertitudes relatives $I_D = \frac{\Delta\delta}{\delta}$ et $I_h = \frac{\Delta h}{h}$ de mesure de δ et h. On cherche une incertitude relative sur V.

Méthode 1 : la différentielle:

$$\frac{\Delta V}{V(\delta, h)} = DV(\delta, h)(\Delta\delta, \Delta h) = 2\frac{\Delta\delta}{\delta} + \frac{\Delta h}{h} = 2I_D + I_h$$

Méthode 2 : On cherche une incertitude relative sur V. Une autre méthode[1] pour l'incertitude relative est d'utiliser la dérivée logarithmique[2], i.e. la dérivée du logarithme de la fonction; ceci est recommandé quand la fonction est un produit. Ici

$$\frac{\Delta V}{V(\delta, h)} = 2\frac{\Delta\delta}{\delta} + \frac{\Delta h}{h} = 2I_D + I_h$$

h)= Si par exemple l'incertitude relative sur la mesure de h est de 1% et celle sur la mesure de δ de 2%, l'incertitude relative sur la mesure de V est : $5\% = (2 \times 2 + 1)\%$.

[1] ON DEMANDE DE SAVOIR LA METHODE 1 UNIQUEMENT (ceci donne une autre manière de calculer l'incertitude ; méthode parfois plus rapide, mais qu'il n'est pas forcément demandée de savoir).

[2] $\ln V = \ln(\pi/12) + 2\ln\delta + \ln h \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = 2\frac{\Delta\delta}{\delta} + \frac{\Delta h}{h}$.

Explications du calcul précédent

$$V = V(\delta, h) = \frac{\pi}{12}\delta^2 h$$

$$\frac{\partial V}{\partial \delta} = \frac{\pi}{12} 2\delta h \, ; \; \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi}{12}\delta^2$$

On calcule la différentielle de V au point (δ, h) pour un accroissement $(\Delta\delta, \Delta h)$:

$$DV(\Delta\delta, \Delta h) = \frac{\pi}{12} 2\delta h \times \Delta\delta + \frac{\pi}{12}\delta^2 \times \Delta h$$

$$DV(\Delta\delta, \Delta h)/V(\delta, h) = \frac{\frac{\pi}{12} 2\delta h \times \Delta\delta + \frac{\pi}{12}\delta^2 \times \Delta h}{\frac{\pi}{12}\delta^2 h} = 2\frac{\Delta\delta}{\delta} + \frac{\Delta h}{h}$$

Conclusion : l'erreur relative sur V est :

$$\frac{\Delta V}{V} = 2I_D + I_h = 5\%.$$

Petit exercices de résolution d'équation à plusieurs variables

Exercice

1. Trouver les applications f de classe C^1 vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$
2. Trouver les applications f de classe C^2 vérifiant $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$

Petit exercices de résolution d'équation à plusieurs variables

Exercice

1. Trouver les applications f de classe C^1 vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$
2. Trouver les applications f de classe C^2 vérifiant $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$

1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \Rightarrow$ on primitive par rapport à x:

$$f(x,y) = C(y)$$

avec $y \mapsto C(y)$ de classe C^1

Petit exercices de résolution d'équation à plusieurs variables

Exercice

1. Trouver les applications f de classe C^1 vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$
2. Trouver les applications f de classe C^2 vérifiant $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=0$

1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \Rightarrow$ on primitive par rapport à x:

$$f(x,y)=C(y)$$

avec $y \mapsto C(y)$ de classe C^1

2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=0 \Rightarrow$ on primitive deux fois par rapport à x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=C_1(y)$$

$$f(x,y)=C_1(y)x+C_2(y)$$

avec $y \mapsto C_1(y)$, $y \mapsto C_2(y)$ de classe C^1.

On vérifie dans les deux cas que l'on a bien une solution.

Exercice de synthèse

Exercice

Soit $\gamma = (x, y) \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée plane définie sur un intervalle I de classe C^1. On suppose qu'il existe une fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in I$, on ait

$$F(x(t), y(t)) = 0. \tag{1}$$

Donner une équation de la tangente à la courbe en un point t_0 lorsque cela est possible (discuter).

Exercice de synthèse

Exercice

Soit $\gamma = (x, y) \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée plane définie sur un intervalle I de classe C^1. On suppose qu'il existe une fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in I$, on ait

$$F(x(t), y(t)) = 0. \tag{1}$$

Donner une équation de la tangente à la courbe en un point t_0 lorsque cela est possible (discuter).

1) Ecrivons l'équation de la tangente en un point t_0 t.q. $(x''(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$

$$\begin{vmatrix} X - x(t_0) & x'(t_0) \\ Y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0 \iff y'(t_0)(X - x(t_0)) - x'(t_0)(Y - y(t_0)) = 0.$$

2) On dérive (1):

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))y'(t_0) = 0.$$

- Supposons par exemple $\frac{\partial F}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) \neq 0 \Rightarrow$

$$x'(t_0) = -y'(t_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) / \frac{\partial F}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))$$

(suite)

$$x'(t_0) = -y'(t_0)\,\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))}$$

On reporte dans l'équation de la tangente:

$$y'(t_0)(X - x(t_0)) - x'(t_0)(Y - y(t_0)) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$y'(t_0)(X - x(t_0)) + y'(t_0)\,\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))}(Y - y(t_0)) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))(X - x(t_0)) + \frac{\partial F}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))(Y - y(t_0)) = 0.$$