CC1 : 4 mars 2020 : 14h30 - 16h (1h ; 1h30 pour les tiers temps)

On attachera le plus grand soin à la présentation et aux calculs. Aucun document ni appareil numérique autorisé. Dans tout exercice, on peut admettre le résultat d'une question pour en traiter d'autres.

Exercice 1. *On considère la courbe d'équation*

$$\begin{cases} x(t) &= 3t^3 + 2t^2 - t - 1, \\ y(t) &= 3t^2 + 2t + 1, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1) Calculer pour $t \in \mathbb{R}$ le vecteur vitesse $(x'(t), y'(t))$.

2) Calculer l'équation de la tangente à la courbe au point de paramètre $t = -1$.

3) Montrer que la courbe $(x(t), y(t))$ admet un seul point double et le calculer.

<u>Indication</u> : on rappelle les identités remarquables $t^2 - s^2 = (t-s)(t+s)$ et $t^3 - s^3 = (t-s)(t^2 + st + s^2)$ ainsi que l'égalité $t^2 + st + s^2 = (t+s)^2 - st$.

1) On trouve que $x'(t) = 9t^2 + 4t - 1$ et $y'(t) = 6t + 2$.
2) Le déterminant donne l'équation $x'(1)(Y - y(1)) - y'(1)(X - x(1)) = 0$, ainsi on trouve $12Y - 8X - 48 = 0$ c.a.d. $Y = 4 + 2X/3$ (notez qu'en $t = 1$, le vecteur vitesse est non nul).
3) On résout le système (pour $s \neq t$) :

$$\begin{cases} 3t^3 + 2t^2 - t - 1 &= 3s^3 + 2s^2 - s - 1, \\ 3t^2 + 2t + 1 &= 3s^2 + 2s + 1. \end{cases}$$

La deuxième équation donne $3(t^2 - s^2) + 2(t - s) = 0$ c.a.d. $t + s = -2/3$. La première équation donne $3(t^2 + st + s^2) + 2(t + s) = 1$ d'où $3((t + s)^2 - ts) + 2(t + s) = 1$. On déduit $ts = -1/3$. Ainsi s et t sont solutions de

$$X^2 + 2/3X - 1/3 = 0.$$

Cette équation du second degré a deux racines -1 et $1/3$. La courbe admet donc un unique point double $(-1, 2)$ atteint en $t = -1$ et en $t = 1/3$.

Exercice 2. *L'exercice est constituée de trois questions indépendantes.*

1) Soit la fonction $f(x, y) = \cos(xy) + 2yx^2$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer les deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

2) Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 + y^2 + x^3.$$

3) Dans un circuit électrique RLC soumis à une tension, on peut associer la période propre du système

$$T(L, C) = 2\pi\sqrt{LC},$$

où $L > 0$ est l'inductance de la bobine et $C > 0$ est la capacité du condensateur. On suppose que l'on a une incertitude relative de 2% sur la mesure de L et de C. Donner l'incertitude relative sur la mesure de la période.

<u>Indication</u> : on pourra au choix s'appuyer sur le calcul de la différentielle de T ou bien de $\ln(T)$ en un point (L_0, C_0) et appliquée à un vecteur quelconque $(L - L_0, C - C_0)$

1) On trouve $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y\sin(xy) + 4xy$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x\sin(xy) + 2x^2$.
2) Par intégration par rapport à x (prendre la primitive par rapport à x) et sachant qu'en intégrant on obtient une constante (dépendant de y !!), on obtient

$$f(x,y) = x + y^2 x + x^4/4 + \alpha(y)$$

où α est une fonction de classe C^1. On vérifie bien qu'un tel f est solution de l'équation de départ (en dérivant par rapport à x).
3) Sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, T est de classe C^1 (comme fonction puissance de L et C). La différentielle de T en (L_0, C_0) vérifie :

$$dT(L_0,C_0)(L-L_0,C-C_0) = \frac{\partial T}{\partial L}(L_0,C_0)(L-L_0) + \frac{\partial T}{\partial C}(L_0,C_0)(C-C_0)$$

d'où

$$dT(L_0,C_0)(L-L_0,C-C_0) = 2\pi\left[\frac{\sqrt{C_0}}{2\sqrt{L_0}}(L-L_0) + \frac{\sqrt{L_0}}{2\sqrt{C_0}}(C-C_0)\right]$$

L'incertitude relative sur T s'écrit donc :

$$\frac{|dT(L_0,C_0)(L-L_0,C-C_0)|}{T(L_0,C_0)} = \left|\frac{L-L_0}{2L_0} + \frac{C-C_0}{2C_0}\right|.$$

Par inégalité triangulaire, l'incertitude relative sur T vérifie l'inégalité

$$\frac{|dT(L_0,C_0)(L-L_0,C-C_0)|}{T(L_0,C_0)} \leq \left|\frac{L-L_0}{2L_0}\right| + \left|\frac{C-C_0}{2C_0}\right|.$$

L'incertitude relative sur T est donc aussi de 2%.

Barême indicatif : 3 points par question environ.