Université d'Avignon - UFR-ip Sciences — Année 2019-2020

L1 Physique-chimie — UE Math 2

III. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

L'invention du calcul différentiel à la fin du 18e siècle par Newton, puis indépendamment par Leibniz, a permis la résolution de nombreux problèmes réputés à l'époque insolubles par le calcul analytique. En dehors des déterminations de minima ou de maxima, le "nouveau calcul" a très vite fait ses preuves dans l'étude des courbes mécaniques, telles que l'équation de la tractrice. La mise en équation de ce genre de problème mène à une équation dont l'inconnue est une fonction dérivable. A titre d'exemple, si l'on cherche la forme d'une chaînette accrochée au mur (caténaire), les équations de la physique conduisent naturellement à résoudre une équation différentielle. Il y a de nombreux autres exemples (courbe brachistochrone, équation de la chaleur...).
Quand cette équation ne fait intervenir que la dérivée première (ainsi que la fonction inconnue), elle est appelée *équation différentielle d'ordre 1.* Si elle fait aussi intervenir la dérivée seconde, on parle d'*équation différentielle d'ordre 2.*
Ce chapitre portera essentiellement sur la résolution d'une classe d'équations bien connues et sur lesquelles on dispose de nombreux résultats, il s'agit des équations différentielles linéaires d'ordre un et deux dont nous allons préciser la définition dans ce qui suit.

On appelle *équation différentielle* une équation reliant une fonction y qui dépend de la variable $t \in I \subset \mathbb{R}$ avec certaines de ses dérivées. Sa forme générale est : $F(t, y, y', y'', \dots) = 0$.
On appelle *solution* de cette équation sur une intervalle donné toute fonction y_0 qui vérifie l'équation sur cet intervalle.
Résoudre une équation différentielle sur une intervalle, c'est trouver toutes les solutions de l'équation différentielle sur cet intervalle.
Un équation différentielle est du *premier ordre* si elle contient la dérivée première à l'exclusion des autres dérivées : $F(t, y, y') = 0$. En règle générale, les solutions de ces équations sont paramétrées par *une* constante (la position initiale).
Un équation différentielle est du *second ordre* si elle contient la dérivée seconde et pas de dérivée d'ordre supérieur à 2 : $F(t, y, y', y'') = 0$. En règle générale, les solutions de ces équations sont paramétrées par *deux* constantes (la vitesse et la position initiales).

Remarque. En physique ou en chimie, les constantes sont calculées en connaissant les conditions initiales ou les conditions aux limites.

1 Equations différentielle linéaires du premier ordre

Etudions l'exemple de la charge d'un condensateur par une force électromotrice e : le circuit comprend un condensateur de capacité C, une résistance R et une force électromotrice e. La relation de Chasles pour les tensions donne $e = u_C + u_R$. Or, l'intensité $i = C\frac{du_C}{dt}$ vérifie aussi $Ri = u_R$, d'où on tire l'équation différentielle (qui lie u_C à sa dérivée)

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = e.$$

1.1 Définitions et notations

DEFINITION. Une $\boxed{\text{équation différentielle linéaire du premier ordre}}$ est une équation du type :

$$(E) \quad a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

où a, b, c sont trois fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$). $\boxed{\text{Résoudre}}$ l'équation (E) sur I, c'est trouver toutes les fonctions dérivables $f : I \to \mathbb{C}$ telles que

$$\forall t \in I, a(t)f'(t) + b(t)f(t) = c(t).$$

Les fonctions a et b sont les coefficients de l'équation et $c(t)$ s'appelle le $\boxed{\text{second membre}}$.
Si $c = 0$, on dit que l'équation est $\boxed{\text{sans second membre}}$ ou $\boxed{\text{homogène}}$.
On peut toujours associer à (E) son $\boxed{\text{équation homogène associée}}$

$$(H) \quad a(t)y' + b(t)y = 0.$$

NOTATIONS. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les solutions de (E) et $\mathcal{S}_H$ l'ensemble de toutes les solutions de (H).

Convention. Lorsque les coefficients et le second membre de l'équation sont tous à valeurs reélles, on ne recherchera que les solutions de (E) à valeurs réelles, sauf mention du contraire.

Mais il arrivera qu'il faille passer par les complexes pour trouver les solutions réelles.

DEFINITION. Soit (E) une équation différentielle linéaires réelles d'ordre deux. On appelle $\boxed{\text{courbe intégrale}}$ de (E) le graphe d'une solution de l'équation (E). Une courbe intégrale est donc une partie de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Lorsque le coefficient a ne s'annule pas sur I, (E) est équivalente à $y' + \frac{b(t)}{a(t)}y = \frac{c(t)}{a(t)}$, c-à -d $y' + A(t)y = B(t)$ en posant $A = \frac{b}{a}$ et $B = \frac{c}{a}$.

DEFINITION. Une équation (E) du type $y' + a(t)y = b(t)$ est dite $\boxed{\text{réduite}}$.

1.2 Résolution d'une équation homogène réduite

Proposition 1 *Soit $a \in \mathbb{C}$ une constante. Les solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0$ sont les fonctions de la forme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \lambda e^{-at}$, où $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Nous pouvons maintenant résoudre par exemple l'équation de décharge d'un condensateur établie précédemment $u'_C + \frac{1}{RC} u_C = 0$. La tension u_C aux bornes du condensateur est de la forme $u_C(t) = \lambda e^{-t/\tau}$ où $\tau = RC$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Exemples.

- Soit à résoudre $y' + \frac{1+j}{1-j} y = 0$. Puisque $\frac{1+j}{1-j} = \frac{(1+j)^2}{2} = j$, les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{-jt}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$;

- soit à résoudre $y' + 2y = 0$. Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{-2t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarquons que nous avons adopté dans cet exemple la convention mentionnée précédemment : on a imposé $\lambda \in \mathbb{R}$ quand les coefficients et le second membre sont réels.

Le cas d'une équation à coefficient variable se traite similairement.

Proposition 2 *Soit $a : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Les solutions de l'équation homogène $(H)\quad y' + a(t)y = 0$ sont les fonctions de la forme $f : I \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$, où A est une primitive de a sur I et $\lambda \in \mathbb{C}$.*

On a donc

$$\mathcal{S}_H = \{f : I \to \mathbb{C}; \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall t \in I, f(t) = \lambda e^{-A(t)}\}.$$

Exemple. Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' + ty = 0$. Puisqu'une primitive de t est $\int t dt = \frac{1}{2}t^2$, les solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{-\frac{t^2}{2}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.3 Résolution de l'équation avec second membre

Notation. Dans la suite, sauf mention du contraire, lorsque f est une fonction continue sur I, $\int f(t)dt$ désignera l'une quelconque de ses primitives.

Proposition 3 *Soient a et $b : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues. Les solutions de l'équation $(E)\quad y' + a(t)y = b(t)$ sont les fonctions de la forme $f : I \to \mathbb{C}$, $t \mapsto (B(t) + \lambda)e^{-A(t)}$, où $A(t) = \int a(t)dt$, $B(t) = \int b(t)e^{A(t)}dt$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.*

En d'autres termes

$$\mathcal{S} = \{f : I \to \mathbb{C}; \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall t \in I, f(t) = \lambda e^{-A(t)} + B(t)e^{-A(t)}\}.$$

La fonction $t \mapsto B(t)e^{-A(t)}$ est une $\boxed{\text{solution particulière}}$ de l'équation (E) obtenue pour $\lambda = 0$.

Méthode de la variation de la constante. On cherche à résoudre l'équation différentielle $(E) \quad y' + a(t)y = b(t)$.

- on résout l'équation homogène associée $(H) \quad y' + a(t)y = 0$. On a choisit une solution *non nulle* notée y_0 (dans la pratique, on choisira souvent $y_0 = e^{-A}$ où $A(t) = \int a(t)dt$) ;
- on sait qu'une fonction $y : I \to \mathbb{C}$ dérivable est solution de (E) si et seulement si elle s'écrit $y = \lambda y_0$ avec $\lambda : I \to \mathbb{C}$ dérivable telle que $\lambda' y_0 = b$, c-à-d $\lambda' = \frac{b}{y_0}$;
- on détermine toutes les primitives de $\frac{b}{y_0}$ pour conclure.

Exemple. Résolvons l'équation $y' + \frac{1}{t}y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Puisque $\int \frac{1}{t}dt = \ln t = A(t)$, $y_0 : t \mapsto e^{-A(t)} = \frac{1}{t}$ est une solution non nulle de l'équation homogène. Appliquons la méthode de variation de la constante : les solutions sont de la forme λy_0 avec $\lambda : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \frac{\lambda'(t)}{t} = 1$, c-à-d $\lambda = \int t dt = \frac{t^2}{2} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{t}{2} + \frac{k}{t}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Remarque. Les solutions des équations différentielles ne peuvent pas toutes être explicitées à l'aide des fonctions usuelles. Citons par exemple sur $\mathbb{R}$ les primitives de la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$, qu'on appelle gaussienne, et qui intervient de manière essentielle en théorie des probabilités.

1.4 Résolution de (E) à l'aide d'une solution particulière

Proposition 4 *Soit y_1 une solution particulière de $(E) \quad y' + a(t)y = b(t)$. Alors, $\mathcal{S} = y_1 + \mathcal{S}_H$.*

On dit que la $\boxed{\text{solution générale}}$ de (E) est toujours la somme d'une solution particulière et de la solution générale de (H).

Méthode. Détermination d'une solution particulière. On cherche à résoudre l'équation différentielle $(E) \quad y' + a(t)y = b(t)$.

- On dispose d'une solution particulière y_1 de (E).
- On résout l'équation homogène associée $(H) \quad y' + a(t)y = 0$.
- On a $\mathcal{S} = y_1 + \mathcal{S}_H$, ainsi la solution générale de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (H).

EXEMPLE. L'équation de la charge d'un condensateur se prête bien à une résolution de ce type. Elle s'écrit $u'_C + \frac{1}{\tau}u_C = e$ et admet une solution constante évidente τe. La tension u_C aux bornes du condensateur est donc de la forme $u_C(t) = \tau e + \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$ où $\tau = RC$.

Nous avons vu que la méthode de la variation de la constante est valable dans tous les cas de figure, car elle réduit la résolution à deux calculs de primitives. Toutefois, elle peut induire de très gros et longs calculs et c'est pourquoi on lui préfère parfois la méthode de déterminer une solution particulière. Bien sûr, ceci ne se fait pas à l'aveugle et il faut avoir idée de quel type de solution particulière on cherche.

EXEMPLE. La lectrice/le lecteur pourra s'amuser à résoudre l'équation différentielle par la méthode de variation des constantes et constatera que c'est très long et fastidueux.

$$(t^2 + 1)y' - 3ty = 1.$$

Au lieu de cela, nous allons plutôt chercher une solution particulière polynomiale. Elle s'écrira donc $P(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ avec $a_n \neq 0$. On remplace dans l'équation différentielle, le terme de plus haut degré à gauche est de degré $n + 1$ et a pour coefficient $na_n - 3a_n$. En identifiant avec le terme de droite, on en déduit que $n = 3$. On cherche donc une solution partculière de la forme $P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$. On remplace dans l'équation et on trouve

$$(3 - 3)at^4 + (2b - 3b)t^3 + (c + 3a - 3c)t^2 + (2b - 3d) + c = 1$$

qui donne : $c = 1$, $a = \frac{2}{3}$, $b = d = 0$, donc $P(t) = \frac{2}{3}t^3 + t$.
de plus, on a $-\int \frac{-3t}{t^2+1}dt = \frac{3}{2}\ln(t^2 + 1)$, donc les solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto \frac{2}{3}t^3 + t + k(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Un cas où la recherche de solution particulière est possible est celui des équations à coefficients constants dont le second membre est une fonction polynôme-exponentielle, c-à-d de la forme $t \mapsto P(t)e^{\omega t}$ avec P polynôme à coefficients complexes et $\omega \in \mathbb{C}$.

Proposition 5 *Soient a, ω deux nombres complexes et P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$. Alors l'équation $y' + ay = P(t)e^{\omega t}$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution particulière de la forme $f(t) = Q(t)e^{\omega t}$ où Q est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ tel que*

1. $\deg(Q) = \deg(P)$ *si* $\omega + a \neq 0$ *;*
2. $\deg(Q) = \deg(P) + 1$ *si* $\omega + a = 0$.

EXEMPLES. Résolvons sur $\mathbb{R}$ les exemples suivants.

1. $y' + 2y = te^{-t}$
   comme $2 - 1 \neq 0$, l'équation admet une solution de la forme $f(t) = (at + b)e^{-t}$. En remplaçant dans l'équation, on trouve les solutions de la forme $t \mapsto (t-1)e^{-t} + ke^{-2t}$ où $k \in \mathbb{R}$.

2. $y' + 2y = e^{-2t}$
   comme $2 - 2 = 0$, l'équation admet une solution de la forme $f(t) = ate^{-2t}$. En remplaçant dans l'équation, on trouve les solutions de la forme $t \mapsto (t+k)e^{-2t}$ où $k \in \mathbb{R}$.

La proposition suivante illustre le puissant outil que sont les nombres complexes pour permettre la résolution de problèmes pour des fonctions à valeurs réelles.

Proposition 6 *Soient a et $b : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues. Alors $f : I \to \mathbb{C}$ est solution particulière de l'équation $(E) \quad y' + a(t)y = b(t)$ si et seulement si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des solutions particulières des équations $y' + a(t)y = \mathrm{Re}(b(t))$ et $y' + a(t)y = \mathrm{Im}(b(t))$.*

Cette méthode est particulièrement efficace quand le second membre contient des fonctions circulaires cos ou sin. Examinons par exemple le cas où $y' + ay = P(t)\cos t$ avec $a \in \mathbb{R}$ et P polynôme à coefficients réels. Puisque $\forall t \in \mathbb{R}, P(t)\cos t = \mathrm{Re}(P(t)e^{jt})$, on peut commencer par rechercher une solution particulière de $y' + ay = P(t)e^{jt}$.
Exemple. Pour résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' + y = t\cos t$, on commence par déterminer une solution particulière de $y' + y = te^{jt}$, qu'on trouve égale à $f(t) = \left(\frac{1-j}{2}t + \frac{j}{2}\right)e^{jt}$. Sa partie réelle, $t \mapsto \frac{t\cos t}{2} + \frac{t-1}{2}\sin(t)$ est une solution particulière de l'équation initiale.

Parfois le second membre contient des termes qui correspondent à des exposants distincts (par exemple $t^2e^{2t} + te^{jt}$). En ce cas, le résultat suivant, appelé $\boxed{\text{principe de superposition}}$, est très utile.

Proposition 7 *(Principe de superposition) Soient les équations*

$$(E) \quad y' + a(t)y = b_1(t) + b_2(t);$$

$$(E_1) \quad y' + a(t)y = b_1(t) \quad \text{et} \quad (E_2) \quad y' + a(t)y = b_2(t).$$

Si y_1 est une solution de (E_1) et y_2 est une solution de (E_2), alors $y_1 + y_2$ est une solution de (E).

C'est grâce à une généralisation de ce principe (aux sommes infinies, dites “séries de Fourier”), que le physicien peut se contenter d'étudier la réponse d'un circuit électrique à des signaux périodiques “purs”, c'est à dire sinusoïdaux. On prouve en effet que tout signal périodique est la “superposition” d'un nombre infini de tels signaux.

Exemple. On peut ainsi résoudre l'équation $y' - y = e^t + e^{2t}$.

1.5 Problème de Cauchy

Très souvent, on ne s'intéresse qu'à une solution d'une équation différentielle, celle qui est donnée par une $\boxed{\text{condition initiale}}$ $y(t_0) = y_0$.

Definition. Un $\boxed{\text{problème de Cauchy}}$ est la donnée d'une équation différentielle (E) et d'une condition initiale $y(t_0) = y_0$. Résoudre ce problème, c'est déterminer les (la) solution(s) f de (E) qui vérifie(nt) $f(t_0) = y_0$.

Proposition 8 *(Théorème de Cauchy-Lipschitz) Soient a et $b : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{C}$. Il existe une unique solution f de l'équation $(E) \quad y' + a(t)y = b(t)$ vérifiant la condition initiale $f(t_0) = y_0$.*

Exemple. On veut résoudre le problème de Cauchy $y' + y = t, y(0) = 1$. On commence par trouver la solution générale de l'équation (comment ?) $y(t) = t - 1 + \lambda e^{-t}$, puis on ajuste la constante λ en résolvant $y(0) = 1$, ce qui donne $\lambda = 1$ et donc $y(t) = t - 1 + e^{-t}$.

2 Equations différentielles linéaires d'ordre 2

Soit un poids de masse m, attaché à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 immergé dans un liquide. On néglige la poussée d'Archimède et on modélise l'action du milieu liquide sur le poids par une force de frottement fluide (de la forme $\vec{f} = -2\mu\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de la bille et $\mu \geq 0$). On choisit l'extrémité de fixation du ressort comme origine O et on note $\vec{u}$ le vecteur unitaire qui dirige la verticale descendante. La position de la bille à l'instant t sera repérée à l'instant t par sa position $y(t)$ dans le repère $(O, \vec{u})$. L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$my''(t)\vec{u} = -k(y(t) - \ell_0)\vec{u} - 2\mu y'(t)\vec{u} + mg\vec{u}.$$

A l'équilibre, cette équation s'écrit

$$\vec{0} = -k(\ell_e - \ell_0)\vec{u} + mg\vec{u};$$

en faisant la différence des deux équations et en posant $y_e(t) = y(t) - \ell_e$ (c-à-d qu'on se repère par rapport à la position d'équilibre ℓ_e), on obtient l'équation

$$my_e''(t) + 2\mu y_e'(t) + ky_e(t) = 0.$$

Si on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\lambda = \frac{\mu}{m\omega_0}$, on veut donc résoudre l'équation

$$y_e''(t) + 2\lambda\omega_0 y_e'(t) + \omega_0^2 y_e(t) = 0.$$

Dans le cas d'un frottement non négligeable (c-à -d $\lambda > 0$, c-à -d $\mu > 0$), on parle d' $\boxed{\textit{oscillateur amorti}}$. Quand $\lambda = 0$, on parle d' $\boxed{\textit{oscillateur non amorti}}$.

2.1 Définitions et notations

Definition. Une $\boxed{\text{équation différentielle linéaire d'ordre deux}}$ est une équation du type :

$$(E) \quad a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t)$$

où a, b, c, d sont quatre fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$). $\boxed{\text{Résoudre}}$ l'équation (E) sur I, c'est trouver toutes les fonctions deux fois dérivables $f : I \to \mathbb{C}$ telles que

$$\forall t \in I, a(t)f''(t) + b(t)f'(t) + c(t)f(t) = d(t).$$

Les fonctions a, b et c sont les coefficients de l'équation et $d(t)$ s'appelle le $\boxed{\text{second membre}}$.
Si $d = 0$, on dit que l'équation est $\boxed{\text{sans second membre}}$ ou $\boxed{\text{homogène}}$.
On peut toujours associer à (E) son $\boxed{\text{équation homogène associée}}$

$$(H) \quad a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0.$$

Notations. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les solutions de (E) et $\mathcal{S}_H$ l'ensemble de toutes les solutions de (H).

Convention. Lorsque les coefficients et le second membre de l'équation sont tous à valeurs reélles, on ne recherchera que les solutions de (E) à valeurs réelles, sauf mention du contraire. En effet, les équations à coefficients réels ont souvent une origine physique et seules les solutions réelles sont alors intéressantes.

Mais il arrivera qu'il faille passer par les complexes pour trouver les solutions réelles (un peu comme on somme des suites géométriques de raison complexe de module 1 pour trouver des sommes trigonométriques).

Definition. Soit (E) une équation différentielle linéaires réelles du premier ordre. On appelle $\boxed{\text{courbe intégrale}}$ de (E) le graphe d'une solution de l'équation (E). Une courbe intégrale est donc une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2.2 Equation homogène à coefficients constants.

Definition. Soient a, b, c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. Soit l'équation homogène à coefficients constants

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = 0.$$

La fonction polynôme définie par $P(t) = at^2 + bt + c$ est appelé $\boxed{\textit{trinôme caractéristique}}$ de l'équation (E).

Proposition 9 *Soient a, b, c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. Notons P le trinôme caratéristique de l'équation $(E) \quad ay'' + by' + cy = 0$.*

1. *si P admet deux racines $\alpha \neq \beta$ les solutions de (E) à valeurs complexes sont les fonctions de la forme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$;*
2. *si P admet une racine double α les solutions de (E) à valeurs complexes sont les fonctions de la forme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{\alpha t}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.*

Exemples. Déterminons les solutions à valeurs complexes des équations suivantes.

1. $y'' + y' + y = 0$. Le trinôme caractéristique de l'équation est

$$P(t) = t^2 + t + 1 = (t + \frac{1 + j\sqrt{3}}{2})(t + \frac{1 - j\sqrt{3}}{2}),$$

   les solutions à valeurs complexes sont définies sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = \lambda \exp\left(t\frac{1+j\sqrt{3}}{2}\right) + \mu \exp\left(t\frac{1-j\sqrt{3}}{2}\right)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$;

2. $y'' - 2jy' - y = 0$. Le trinôme caractéristique de l'équation est $P(t) = t^2 - 2jt - 1 = (t - j)^2$, les solutions à valeurs complexes sont définies sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{jt}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

La résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 2 n'est pas encore complète car il nous reste à déterminer la forme générale des solutions à valeurs réelles quand les coefficients sont réels.

Proposition 10 *Soient a, b, c trois nombres réels avec $a \neq 0$. Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme caratéristique P de de l'équation $(E) \quad ay'' + by' + cy = 0$.*

1. *lorsque $\Delta > 0$, si α et β sont les deux racines réelles de P, les solutions de (E) à valeurs réelles sont les fonctions de la forme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;*
2. *si $\Delta = 0$, si α est la racine double de P, les solutions de (E) à valeurs réelles sont les fonctions de la forme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{\alpha t}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;*
3. *si $\Delta < 0$, si $r \pm js$ sont les deux racines complexes de P, les solutions de (E) à valeurs réelles sont les fonctions de la forme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto (\lambda \cos(st) + \mu \sin(st))e^{rt}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

Exemples. Déterminons les solutions à valeurs réelles des équations suivantes.

1. $y'' + y' + y = 0$. Le trinôme caractéristique de l'équation est
$$P(t) = t^2 + t + 1 = (t + \frac{1 + j\sqrt{3}}{2})(t + \frac{1 - j\sqrt{3}}{2}),$$
les solutions réelles sont définies sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = (\lambda \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \mu \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t))e^{-\frac{t}{2}}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$;
2. $y'' + 3y' + 2y = 0$. Le trinôme caractéristique de l'équation est $P(t) = t^2 + 3t + 2 = (t+2)(t+1)$, les solutions à valeurs réelles sont définies sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{-2t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
3. $y'' - 4y' + y = 0$. Le trinôme caractéristique de l'équation est $P(t) = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2$, les solutions à valeurs réelles sont définies sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{2t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Méthode. Equations du type $y'' + ky = 0$ avec $k \in \mathbb{R}$. Il s'agit d'un cas usuel qu'il faut savoir résoudre immédiatement. Il y a trois cas à envisager.

- **Cas où $k = \omega^2 > 0$.** Les solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, où de manière équivalente les fonctions de la forme $t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi)$ avec A et φ réels.
- **Cas où $k = -\omega^2 < 0$.** Les solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda \cosh(\omega t) + \mu \sinh(\omega t)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, où de manière équivalente les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{\omega t} + \mu e^{-\omega t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
- **Cas où $k = 0$.** Les solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda t + \mu$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

EXEMPLE. Décrivons qualitativement l'évolution de l'oscillateur étudié en début de section, puis justifions la terminologie d'oscillateur amorti et d'oscillateur non amorti.

- La solution générale de l'équation $y'' + \omega_0^2 y = 0$ est de la forme $y(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec A et φ réels. Elle est donc périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, ce qui décrit bien des oscillations (non amorties).

- Considérons l'équation d'un oscillateur $y''+2\lambda\omega_0 y'+\omega_0^2 y = 0$ avec $1 > \lambda$. Alors le discriminant Δ est strictement négatif. Ses racines sont $-\lambda\omega_0 \pm j\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$ et les solutions sont donc de la forme

$$y(t) = \left(a\cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}t\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}t\right)\right)e^{-\lambda\omega_0 t} = A\cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}t + \varphi\right)e^{-\lambda\omega_0 t}.$$

  La courbe représentative de y oscille entre les courbes représentatives des fonctions $t \mapsto \pm Ae^{-\lambda\omega_0 t}$ et $y(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ (cela vient de l'exponentielle et du signe positif de λ), ce qui justifie la terminologie d'oscillateur amorti.

2.3 Equation à coefficients constants avec second membre.

Reprenons le système du ressort étudié précédemment en ajoutant une force extérieure $\vec{F}_{\text{ext}} = F\vec{u}$. L'équation d'évolution de y_e s'écrit alors

$$y_e'' + 2\lambda\omega_0 y_e' + \omega_0^2 y_e = \frac{F}{m}.$$

Lorsque la force extérieure vibre à la pulsation ω, par exemple $F(t) = F_0\cos(\omega t)$, on s'aperçoit qu'après un régime transitoire, la bille oscille à la pulsation ω ; on parle à ce sujet d'oscillations forcées ou entretenues. Nous justifierons ces observations à l'aide de la théorie générale exposée ci-après.

Les méthodes de résolutions générales sont les mêmes que pour l'ordre un : variation des constantes et recherche d'une solution particulière, mais ceci ne sera pas traité dans ce cours où nous nous contenterons de regarder ce qui se passe pour un certain type de second membre.

Proposition 11 *Soit y_1 une solution particulière de l'équation linéaire du second ordre $(E)\quad ay''+by'+cy = d(t)$. Alors l'ensemble des solutiosn est donné par $\mathcal{S} = y_1 + \mathcal{S}_H$.*

Méthode. Détermination d'une solution particulière. On cherche à résoudre l'équation différentielle $(E) \quad ay'' + by' + cy = d(t)$.

- On dispose d'une solution particulière y_1 de (E).
- On résout l'équation homogène associée $(H) \quad (E) \quad ay'' + by' + cy = 0$.
- On a $\mathcal{S} = y_1 + \mathcal{S}_H$, ainsi la solution générale de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (H).

Le cas usuel (le seul que nous allons étudier), est celui d'un second membre polynôme fois exponentielle. La recherche d'une solution particulière dans ce cas généralise la méthode exposée dans le proposition 5.

Proposition 12 *Soient $a \neq 0, b, c$ et ω quatre nombres complexes et S un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$. Alors l'équation $ay'' + by' + cy = S(t)e^{\omega t}$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution particulière de la forme $f(t) = T(t)e^{\omega t}$ où T est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ tel que*

1. $\deg(T) = \deg(S)$ *si ω n'est pas racine du trinôme caractéristique P ;*
2. $\deg(T) = \deg(S) + 1$ *si ω est racine simple du trinôme caractéristique P ;*
3. $\deg(T) = \deg(S) + 2$ *si ω est racine double du trinôme caractéristique P.*

Exemple. Résolvons l'équation $y'' - 3y' + 2y = f(t)$ pour plusieurs fonctions f.
Toutes les équations qui vont suivre admettront donc le même trinôme caractéristique de racines 1 et 2. L'équation (H) admet donc pour solutions les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{2t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

1. $f(t) = t$. Les solutions de l'équation sont les fonctions $t \mapsto \frac{2t+3}{4} + \lambda e^t + \mu e^{2t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
2. $f(t) = e^{2t}$. Les solutions de l'équation sont les fonctions $t \mapsto te^{2t} + \lambda e^t + \mu e^{2t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
3. $f(t) = te^t$. Les solutions de l'équation sont les fonctions $t \mapsto -(t^2/2 + t)e^t + \lambda e^t + \mu e^{2t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

le théorème de superposition permet de simplifier les calculs en "cassant"le second membre en une somme de fonctions plus simples. On peut reprendre mot à mot le commentaire déjà donné pour les équations d'ordre 1 à propos de ce résultat.

Proposition 13 *(Principe de superposition) Soient les équations*

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = d_1(t) + d_2(t);$$

$$(E_1) \quad ay'' + by' + cy = d_1(t) \quad \text{et} \quad (E_2) \quad ay'' + by' + cy = d_2(t).$$

Si y_1 est une solution de (E_1) et y_2 est une solution de (E_2), alors $y_1 + y_2$ est une solution de (E).

Exemple. Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - 3y' + 2y = \cosh(t)$.
L'équation s'écrit $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.
Le second membre est une superposition de fonctions de type polynôme fois exponentielle. Le trinôme caractéristique est $P(t) = (t-2)(t-1)$. Comme -1 n'est pas racine de P, l'équation admet une solution particulière de la forme $f(t) = ate^t + be^{-t}$. On calcule alors $f'(t)$, $f''(t)$, on injecte dans l'équation qui devient

$$6be^{-t} - ae^t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto -\frac{1}{2}te^t + \frac{e^{-t}}{12} + \lambda e^t + \mu e^{2t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Lorsque (E) est à coefficients réels et que le second membre est du type $P(t)\cos(\omega t)$ ou $P(t)\sin(\omega t)$ (où P désigne un polynôme à coefficients réels), par exemple dans le cas des oscillations forcées d'un système mécanique, le passage à $\mathbb{C}$ nous permettra de trouver des solutions à valeurs réelles de (E). Comme dans le cas des équations d'ordre 1, le calcul sera justifié par la proposition qui suit.

Proposition 14 *Soient Soient $a \neq 0$, b et c trois nombres réels et $d : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue avec I intervalle de $\mathbb{R}$. Alors $f : I \to \mathbb{C}$ est solution de l'équation $(E) \quad ay'' + by' + cy = d(t)$ si et seulement si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des solutions particulières des équations $ay'' + by' + cy = \mathrm{Re}(d(t))$ et $ay'' + by' + cy = \mathrm{Im}(d(t))$.*

Exemple. Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E) \quad y'' + 4y' + 5y = e^{-2t}\sin(t)$.
On cherche une solution particulière de l'équation $y'' + 4y' + 5y = e^{(-2+j)t}$. Puisque les racines du trinôme caractéristique sont $-2 \pm j$, il existe une solution particulière de la forme $f(t) = ate^{(-2+j)t}$ avec $a \in \mathbb{C}$. On calcule alors les deux dérivées premières de f et on injecte dans l'équation, ce qui donne $a = -\frac{j}{2}$. La partie imaginaire de $f(t) = -\frac{j}{2}te^{(-2+j)t}$ est donc une solution particulière de l'équation initiale et vaut $f_0(t) = -\frac{t\cos(t)e^{-2t}}{2}$. La solution générale de (H) s'écrivant $t \mapsto$

$(\lambda\cos(t)+\mu\sin(t))e^{-2t}$ avec $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme

$$t\mapsto -\frac{t\cos(t)e^{-2t}}{2}+(\lambda\cos(t)+\mu\sin(t))e^{-2t}$$

avec $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Nous sommes maintenant en mesure d'expliquer les phénomènes observés lors des expériences sur les oscillations mécaniques entretenues. L'équation générale d'une grandeur physique $y(t)$ soumise à des oscillations forcées s'écrit

$$(E)\quad y''+2\lambda\omega_0 y'+\omega_0^2 y=A\cos(\omega t)$$

où $\lambda\geq 0$ est le coefficient d'amortissement du système (on fait toujours l'hypothèse d'un faible amortissment $\lambda>1$), ω_0 est la pulsation propre du système (i.e. la pulsation qu'aurait le système s'il n'était soumis à aucune force extérieure ni amortissement), ω est la pulsation de l'excitation extérieure subie par le système et A est son amplitude. On souhaite connaître la réponse du système à cette excitation extérieure, c-à-d que l'on recherche la forme de la solution générale de (E).

Commençons par passer à $\mathbb{C}$ en recherchant une solution particulière de

$$(E)\quad y''+2\lambda\omega_0 y'+\omega_0^2 y=Ae^{j\omega t}.$$

Le trinôme caractéristique de cette équation est $P(t)=t^2+2\lambda\omega_0 t+\omega_0^2$ et son discriminant $\Delta=4\omega_0^2(\lambda^2-1)$ est négatif dans le cas d'un faible amortissement. Posons $\delta=\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$.

Cas d'un oscillateur non amorti : $\lambda=0$. Les racines de P valent dans ce cas $\pm j\omega_0^2$. Quand $\omega=\omega_0$, il existe une solution particulière de la forme $y(t)=Ate^{j\omega_0 t}$. En la reportant dans l'équation, on trouve $A=\frac{1}{2\omega_0}$. La partie réelle de cette solution valant $t\mapsto\frac{t\sin(\omega_0 t)}{2\omega_0}$, la solution générale de l'équation s'écrit

$$y(t)=\lambda\cos(\omega_0 t)+\mu\sin(\omega_0 t)+\frac{t\sin(\omega_0 t)}{2\omega_0}\quad\text{avec}\quad\lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

L'excitation à la pulsation propre d'un oscillateur non amorti se traduit par une explosion progressive de la réponse du système.
Quand $\omega\neq\omega_0$, on passe également à $\mathbb{C}$. Il existe une solution particulière de la forme $f(t)=Be^{j\omega t}$. On trouve alors $B=\frac{A}{\omega_0^2-\omega^2}$. La fonction $t\mapsto\frac{A\cos(\omega t)}{\omega_0^2-\omega^2}$ est donc une solution de l'équation initiale. La solution générale de cette équation s'écrit

$$y(t)=\lambda\cos(\omega_0 t)+\mu\sin(\omega_0 t)+\frac{A\cos(\omega t)}{\omega_0^2-\omega^2}\quad\text{avec}\quad\lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Dans ce cas il y a des oscillations forcées, obtenues par superposition des deux oscillations de fréquences distinctes ω et ω_0, le résultat n'est plus une sinusoïde.

Cas d'un oscillateur amorti, avec : $0 < \lambda < 1$. Les racines de P valent dans ce cas $-\lambda\omega_0 \pm j\delta$. Il existe une solution particulière de la forme $f(t) = Be^{j\omega t}$. En reportant dans l'équation, on trouve

$$B = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\lambda\omega\omega_0}.$$

Notons $Z = \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+2j\lambda\omega\omega_0}$ que l'on écrit sous forme polaire $Z = |Z|e^{j\varphi}$. Comme

$$\mathrm{Re}(f(t)) = A\frac{\cos(\omega t + \varphi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2\omega_0^2}},$$

la solution générale de l'équation (E) s'écrit

$$y(t) = (\lambda\cos(\delta t) + \mu\sin(\delta t))e^{-\lambda\omega_0 t} + A\frac{\cos(\omega t + \varphi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2\omega_0^2}} \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Puisque la solution générale de (H) tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, on voit progressivement apparaître un régime d'oscillations à la même pulsation ω que l'excitation (ce régime correspond à la solution particulière calculée ci-dessus), ce qui justifie la terminologie d'oscillations forcées.

2.4 Problème de Cauchy

La présence des deux constantes λ et μ dans la description générale des solution de l'équation homogène (H) a pour conséquence qu'une solution de (E) est entièrement déterminée par la donnée d'une condition initiale du type $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y'_0$. En langage de mécanicien : le mouvement d'un point matériel de masse m est entièrement défini par la donnée des forces auxquelles il est soumis (la donnée d'une équation différentielle d(ordre 2), et par sa position et sa vitesse initiales (la condition initiale). On appellera *problème de Cauchy* pour l'équation (E) la donnée d'une telle condition initiale.

Proposition 15 *(Théorème de Cauchy-Lipschitz) Soient $a \neq 0$, b et c trois nombres complexes et et $d : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tout $t_0 \in I$ et $y_0, y'_0 \in \mathbb{C}$, il existe une unique solution $f : I \to \mathbb{C}$ de l'équation (E) $\quad ay'' + by' + cy = d(t)$ vérifiant la condition initiale $f(t_0) = y_0, f'(t_0) = y'_0$.*

On prouve facilement que si les coefficients, le second membre et la condition initiale sont à valeurs réelles, l'unique solution du problème de Cauchy est à valeurs réelles.

Exemples. Résolvons sur $\mathbb{R}$ les problèmes de Cauchy suivants.

1. $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$.
   On sait qu'il existe une unique solution à un problème de Cauchy. Puisque la fonction nulle est clairement solution de ce problème, il s'agit de *la* solution.

2. $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
   Le trinôme caractéristique admet la racine double 3 Les solutions de l'équation sont donc de la forme $t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{3t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La condition initiale impose $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, la solution du problème de Cauchy est donc $t \mapsto te^{3t}$.

3. $y'' - 3y' + 2y = t$, $y(0) = y'(0) = 1$.
   Le trinôme caractéristique admet 1 et 2 comme racines. Le second membre est du type polynôme fois exponentielle. 0 n'étant pas racine du trinôme caractéristique, il existe une solution particulière de la forme $t \mapsto at + b$. On aboutit à $a = 1/2$ et $b = 3/4$. Les solutions sont donc de la forme $t \mapsto \frac{2t+3}{4} + \lambda e^t + \mu e^{2t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy impose $\lambda = 0$ et $\mu = 1/4$; son unique solution est donc $t \mapsto \frac{2t+3}{4} + \frac{1}{4}e^{2t}$.