Université d'Avignon - UFR-ip Sciences | Année 2019-2020
L1 Physique-chimie | UE Math 2

II. NOMBRES COMPLEXES

Les nombres complexes furent introduits au XVIème siècle afin de résoudre les équations polynomiales du troisième degré.

Leur aspect géométrique, en particulier le fait qu'avec un seul nombre complexe on puisse coder un point ou un vecteur du plan, objet 2-dimensionnel, n'apparut clairement qu'à partir du XIXème siècle.

L'introduction de la fonction exponentielle complexe ($t \in \mathbb{R} \mapsto e^{jt} \in \mathbb{C}$) permet elle de simplifier de nombreux calculs trigonométriques, en remplaçant en particulier la dérivation par la multiplication par $j = \sqrt{-1}$.

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x \quad \text{et} \quad \frac{d\sin x}{dx} = \cos x \Leftrightarrow \frac{de^{jx}}{dx} = je^{jx}.$$

Tout ceci est très utilisé en électricité, où interviennent les équations différentielles linéaires du second ordre que nous aborderons dans le chapitre 3. Plus généralement, l'exponentielle complexe est utilisée pour décrire le comportement d'oscillateurs électriques ou les phénomènes ondulatoires en électromagnétisme.

Avertissement. Nous avons adopté dans ce chapitre le parti pris de noter j la racine carrée de -1 et non i, comme cela se partique usuellement en mathématiques. La raison en est qu'en physique, suivant la sous-discipline considérée : électricité (où $\sqrt{-1}$ se note j pour éviter toute confusion avec l'intensité) ou mécanique des fluides, ondes, etc...(où $\sqrt{-1}$ se note i), vous devez être capable d'utiliser les deux notations. Nous reviendrons à la notation i dans le prochain chapitre.

1 Définitions et règles de calcul

Il n'existe pas de nombre réel x tel que $x^2 = -1$. On introduit de nouveaux nombres, les nombres complexes, pour donner des solutions à cette équation et à bien d'autres encore.

NOTATIONS. On convient de noter $\boxed{j = \sqrt{-1}}$ une racine carrée de -1, c-à-d un nombre complexe tel que $j^2 = -1$.

Un $\boxed{\text{nombre complexe}}$ s'écrit $\boxed{\text{de manière unique}}$ $a + bj$, où a et b sont des nombre réels. De manière unique signifie que si a, b, c, d sont des nombres réels tels que $a + bj = c + dj$, alors on a $a = c$ et $b = d$. Cette écriture est la $\boxed{\text{forme algébrique}}$ du nombre complexe, par opposition à la forme polaire dont nous parlerons un peu plus tard dans le chapitre. L'ensemble des nombres complexes se note $\boxed{\mathbb{C}}$.

DEFINITION.

- Un nombre complexe z est défini par la donnée de deux réels a et b et s'écrit $z = a + jb$. Le nombre réel a est appelé la $\boxed{\text{partie réelle}}$ de z, et se note $\boxed{\mathrm{Re}(z)}$; le réel b est appelé la $\boxed{\text{partie imaginaire}}$ de z, et se note $\boxed{\mathrm{Im}(z)}$.

- On définit dans $\mathbb{C}$ l'addition par

  $$(A) \qquad (a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d),$$

  la multiplication par

  $$(M) \qquad (a + jb) \times (c + jd) = (ac' - bd) + j(ad + bc).$$

Exemple. $(2 + j3) \times (-1 + j4) = (2 \times (-1) - 3 \times 4) + j(2 \times 4 + 3 \times (-1)) = -14 + j5$.

Remarque. On a en particulier

$$(a + j0) + (a' + j0) = (a + a') + j0 \tag{1}$$

$$(a + j0) \times (a' + j0) = aa' + j0 \tag{2}$$

$$(a + j0) + (0 + j1) \times (b + j0) = a + jb \tag{3}$$

- Le nombre complexe $a + j0$ se note simplement a, et est identifié au réel a. D'après (1) et (2), les opérations définies par (A) et (M) prolongent l'addition et la multiplication des réels.

- Le nombre complexe $0 + jb$ se note simplement jb. Un nombre complexe de partie réelle nulle (donc de la forme jb, $b \in \mathbb{R}$) est appelé $\boxed{\text{imaginaire pur}}$. Le nombre complexe $j1$ se note simplement j. Ainsi d'après (3), $a + jb$ est la somme des nombres complexes a et $j \times b$.

- On a $j^2 = (0 + j1) \times (0 + j1) = (0 \times 0 - 1 \times 1) + j(0 \times 1 + 1 \times 0) = (-1) + j0 = -1$.

Théorème 1 *Les opérations + et × définies dans $\mathbb{C}$ par (A) et (M) ont les propriétés suivantes.*
1) Associativité de l'addition : $(z+z')+z''=z+(z'+z'')$.
2) Commutativité de l'addition : $z+z'=z'+z$.
3) 0 *est élément neutre pour l'addition :* $z+0=0+z=z$.
4) Tout nombre complexe $z=a+jb$ *a un opposé : le nombre complexe* $(-a)+j(-b)$, *noté* $-z$, *vérifie* $z+(-z)=(-z)+z=0$.
5) Associativité de la multiplication : $(z\times z')\times z''=z\times(z'\times z'')$.
6) Commutativité de la multiplication : $z\times z'=z'\times z$.
7) 1 *est élément neutre pour la multiplication :* $z\times 1=1\times z=z$.
8) Tout nombre complexe non nul $z=a+jb$ *(*$(a,b)\neq(0,0)$*) possède un inverse : en posant* $z'=\frac{a}{a^2+b^2}+j(\frac{-b}{a^2+b^2})$, *on obtient* $z\times z'=z'\times z=1$ *;* z' *est appelé l'inverse de* z, *et est noté* $(1/z)$ *ou* z^{-1}.
9) Distributivité : $z\times(z'+z'')=(z\times z')+(z\times z'')$.

On dit que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

Exemple. L'inverse du nombre complexe $1+2j$ est

$$\frac{1}{1+2j}=\frac{1}{1^2+2^2}+j\Big(-\frac{2}{1^2+2^2}\Big)=\frac{1}{5}-j\frac{2}{5}.$$

Notations. Par la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{C}$, $a+jb$ se note aussi $a+bj$.

Pour $z,z'\in\mathbb{C}$, $z+(-z')$ est noté $\boxed{z-z'}$; en particulier $a+j(-b)$ est noté $a-jb$.

Pour $z,z'\in\mathbb{C}$, $z'\neq 0$, $z\times(\frac{1}{z'})$ est noté $\boxed{\frac{z}{z'}}$.

Soit $z\in\mathbb{C}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit $\boxed{z^n}:=\underbrace{z\times\ldots\times z}_{n\ fois}$. On pose $z^0:=1$ et, pour $n\in\mathbb{Z}^*_-$, $\boxed{z^n}:=1/z^{|n|}$. On a

$$\forall(n,m)\in\mathbb{Z}^2,\quad z^n\times z^m=z^{n+m}.$$

Remarque. Comme corollaire du théorème 1, on a

$$\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2,\quad zz'=0 \iff z=0 \ \text{ ou } \ z'=0$$

En particulier, si $a\in\mathbb{R}^*_-$, $\boxed{\text{l'équation } z^2=a \text{ a deux solutions, qui sont } j\sqrt{|a|} \text{ et } -j\sqrt{|a|}}$. En effet, on a

$$z^2=a \iff z^2=(j\sqrt{|a|})^2 \iff (z-j\sqrt{|a|})(z+j\sqrt{|a|})=0 \iff z-j\sqrt{|a|}=0 \ \text{ ou } \ z+j\sqrt{|a|}=0.$$

Proposition 2 *Soit $P(t) = at^2 + bt + c$ un polynôme à coefficients réels de degré 2 (c-à-d $a \neq 0$). Alors P a au moins une racine (réelle ou complexe). Plus précisément si on note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de P, on a*

- *si $\Delta = 0$, alors $P(t) = a(t + \frac{b}{2a})^2$ a une racine double, $-\frac{b}{2a}$;*
- *si $\Delta > 0$, alors P a deux racines réelles différentes, $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;*
- *si $\Delta < 0$, alors P a deux racines complexes non réelles différentes, $\frac{-b \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.*

Proposition 3 *Pour $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}.$$

2 Conjugaison et module

2.1 Représentation géométrique d'un nombre complexe

On considère le plan orienté, muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

Definition.

- On appelle $\boxed{\text{image du nombre complexe } z = a + jb}$ le point M du plan de coordonnées a, b dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
- On appelle $\boxed{\text{vecteur image de } z}$ le vecteur $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.
- On dit que z est l'$\boxed{\text{affixe}}$ (complexe) du point $M = M(z)$ (ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$).

Remarque. Le vecteur image de $z_1 + z_2$ est la somme du vecteur image de z_1 et du vecteur image de z_2 : $\overrightarrow{OM(z_1 + z_2)} = \overrightarrow{OM(z_1)} + \overrightarrow{OM(z_2)}$.

Le vecteur image de $z_2 - z_1$ est $\overrightarrow{OM(z_2 - z_1)} = \overrightarrow{OM(z_2)} - \overrightarrow{OM(z_1)} = \overrightarrow{M(z_1)M(z_2)}$.

Quant à l'interprétation géométrique de la multiplication des nombres complexes, nous la verrons un peu plus tard.

2.2 Conjugué d'un nombre complexe

DEFINITION. On appelle $\boxed{\text{nombre complexe conjugué}}$ de $z = a + jb$ ($a, b \in \mathbb{R}$), le nombre complexe $\boxed{\bar{z}} := a - jb$.

EXEMPLES. $\overline{1+j} = 1 - j$, $\overline{3} = 3$, $\overline{j} = -j$, $\overline{4 + j \times j} = \overline{3} = 3$.

On a les propriétés suivantes :

Proposition 4 *1)* $\forall z \in \mathbb{C}$, $Re(\bar{z}) = Re(z)$, $Im(\bar{z}) = -Im(z)$,

$$Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad , \quad Im(z) = \frac{1}{2j}(z - \bar{z})$$

2) Un nombre complexe est réel si et seulement si $\bar{z} = z$.

3) Un nombre complexe est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$.

4) $\forall z_1 \in \mathbb{C}$, $\forall z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{(\overline{z_1})} = z_1$, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$.
Si $z_2 \neq 0$, $\overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$.

Interprétation géométrique : Le point $M(\bar{z})$ d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique orthogonal du point $M(z)$ d'affixe z par rapport à l'axe des x.

Méthode : Pour mettre sous forme agébrique le quotient de deux nombres complexes, il suffit de multiplier dénominateur et numérateur de la fraction par la quantité conjuguée du dénominateur $z_1/z_2 = z_1\bar{z}_2/z_2\bar{z}_2$.

EXEMPLE.

$$\frac{1}{1+j} = \frac{1-j}{1^2+1^2} = \frac{1-j}{2}.$$

2.3 Module d'un nombre complexe

DEFINITION. Pour $z = a + jb \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, on appelle $\boxed{\text{module de } z}$ le réel positif ou nul $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$.

EXEMPLES. $|1 + j| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $|3 - 4j| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, $|4j| = 4$, $|-2| = 2$.

Interprétation géométrique : Le module de z est la distance euclidienne entre O et $M(z)$, le point image de z : $|z| = OM(z)$. Le module de $z' - z$ est la distance euclidienne entre $M(z)$ et $M(z')$: $|z' - z| = M(z)M(z')$.

On a les propriétés suivantes :

Proposition 5 *Pour tout z et z' dans $\mathbb{C}$,*
1) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$, $|Re(z)| \leq |z|$, $|Im(z)| \leq |z|$.
2) $|z| \in \mathbb{R}_+$ *et* ($|z| = 0 \iff z = 0$).
3) $|z|^2 = z\bar{z}$. *Si* $z \neq 0$, $1/z = \bar{z}/|z|^2$.
4) Un nombre complexe a pour module 1 si et seulement si $\bar{z} = 1/z$.
5) $|zz'| = |z||z'|$ *et si* $z' \neq 0$, $|z/z'| = |z|/|z'|$.
6) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ *(inégalité triangulaire).*

Exemple. Déterminons l'ensemble des nombres complexes z tels que $|jz - 1| = |jz + 1|$.
Soit $z \in \mathbb{C}$, on a $|jz - 1| = |jz + 1|$ si et seulement si $|j(z + j)| = |j(z - j)|$, donc si et seulement si $|j|.|z + j| = |j|.|z - j|$. Notons A et B les points d'affixes j et $-j$. Soit M le point d'affixe $z \in \mathbb{C}$, alors $|jz - 1| = |jz + 1|$ si et seulement si $AM = BM$, donc si et seulement si M appartient à la médiatrice de $[A, B]$ et par conséquent si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.

3 L'exponentielle complexe

3.1 Représentation polaire d'un nombre complexe

Il existe deux modes usuels de repérage dans le plan : les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires. Pour les secondes, rappelons ce que vous avez vu au premier semestre : un point M distinct de l'origine est complétement déterminé par la donnée d'un nombre réel strictement positif $r \in \mathbb{R}_+^*$ et d'une mesure d'angle θ de la manière suivante : soit $\vec{w}$ l'unique vecteur de norme 1 qui fait un angle θ avec $\vec{u}$, c-à-d tel que $\vec{w} = \cos\theta.\vec{u} + \sin\theta.\vec{v}$; M est alors défini par $\overrightarrow{OM} = r.\vec{w}$. Remarquons que r est unique mais pas θ.

Proposition 6 *Soit z un nombre complexe non nul. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que* $z = |z|(\cos\theta + j\sin\theta)$. *le point M du plan d'affixe z a alors comme coordonnées polaires $r = |z|$ et θ.*

Definition.

- Soit $z = a + jb \in \mathbb{C}^*$. On appelle $\boxed{\text{argument}}$ de z tout réel θ tel que $z/|z| = \cos\theta + j\sin\theta$. En d'autres termes, $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de z si et seulement si $\cos\theta = a/\sqrt{a^2 + b^2}$ et $\sin\theta = b/\sqrt{a^2 + b^2}$.

- l'écriture $z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$ s'appelle la $\boxed{\text{forme polaire}}$ de z.

REMARQUE. Le plan étant muni du repère orthonormé direct $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, un argument de z est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM(z)})$.

DEFINITION. On appelle $\boxed{\text{argument principal}}$ de z l'unique argument de z élément de l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On le note $\boxed{\arg(z)}$.

EXEMPLES. On a $(-2j)/|-2j| = (-2j)/2 = -j = \cos(-\pi/2) + j\sin(-\pi/2)$. Donc $-\pi/2$ est un argument (c'est l'argument principal) de $-2j$. On a $(1+j)/|1+j| = (1+j)/\sqrt{2} = (1/\sqrt{2}) + j(1/\sqrt{2}) = \cos(\pi/4) + j\sin(\pi/4)$, donc $\pi/4$ est un argument (l'argument principal) de $1+j$.

Méthode. Pour déterminer la forme polaire d'un nombre complexe z non nul donné, on commencera par calculer $|z|$ puis on cherchera θ tel que $z/|z| = \cos\theta + j\sin\theta$. On se souviendra pour cela des valeurs particulières du cosinus et du sinus en 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}\dots$
EXEMPLE. écrivons sous forme polaire j, $1+j$ et $-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- $j = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}$;
- $|1+j| = \sqrt{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$ d'où $1 + j = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4})$;
- comme $-\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{2\pi}{3}$, on a $-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3}$.

3.2 Ecriture exponentielle

NOTATIONS. On pose $\boxed{e^{j\theta} = exp(j\theta) = \cos\theta + j\sin\theta}$. $e^{j\theta}$ est donc le nombre complexe de module 1 et d'argument θ. Remarquons que $e^{j\theta_1} = e^{j\theta_2}$ si et seulement si $\theta_2 - \theta_1$ est un multiple de 2π.

EXEMPLES. $e^{j0} = 1$, $e^{j\pi} = -1$, $e^{j\pi/2} = j$, $e^{-j\pi/2} = -j$, $e^{j\pi/6} = (\sqrt{3}/2) + (j/2)$, $e^{j7\pi/2} = e^{-j\pi/2} = -j$.

Proposition 7 *1)* $\forall(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2,\ e^{j\theta}e^{j\theta'} = e^{j(\theta+\theta')}$ *(équation fonctionnelle).*

2) $\forall\theta \in \mathbb{R},\ (1/e^{j\theta}) = e^{-j\theta} = \overline{e^{j\theta}}$.

3) $\forall\theta \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (e^{j\theta})^n = e^{jn\theta}$, *c'est-à-dire* $(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)$ *(formule de Moivre).*

4) $\cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$, $\sin\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$ *(formules d'Euler).*

Forme exponentielle d'un nombre complexe z **:** $z = re^{j\theta}$, où r est le module de z et (si $z \neq 0$) θ est un argument de z. On a, pour $r_1, r_2 > 0$,

$$r_1e^{j\theta_1} = r_2e^{j\theta_2} \iff r_1 = r_2 \text{ et } \theta_2 - \theta_1 \text{ est un multiple de } 2\pi.$$

Théorème 8 *Soient les nombres complexes non nuls* $z = re^{j\theta}$, $z_1 = r_1e^{j\theta_1}$, $z_2 = r_2e^{j\theta_2}$. *On a*

1) $z_1z_2 = r_1r_2e^{j(\theta_1+\theta_2)}$

2) pour $n \in \mathbb{Z}$, $z^n = r^ne^{jn\theta}$.

Conséquence : Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. On note θ_i un argument de z_i et r_i le module de z_i. Alors $\theta_1 + \theta_2$ (resp. $\theta_1 - \theta_2$) est un argument de z_1z_2 (resp. z_1/z_2) et r_1r_2 (resp. r_1/r_2) est le module de z_1z_2 (resp. z_1/z_2). On a ainsi une interprétation géométrique de la multiplication dans $\mathbb{C}$.

Si θ est un argument de $z \in \mathbb{C}^*$ et r est son module, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n\theta$ est un argument de z^n et r^n est le module de z^n.

Exemple. Soit $z_1 = e^{j\pi/3}$ et $z_2 = e^{-j\pi/4}$. On a $z_1z_2 = e^{j\pi/12}$. En écrivant z_1, z_2 et z_1z_2 sous forme algébrique, on peut en déduire $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Méthode de factorisation par l'arc moitié
Soient $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. On déduit des propriétés de l'exponentielle

$$e^{j\theta} + e^{j\varphi} = e^{j(\theta+\varphi)/2}(e^{j(\theta-\varphi)/2} + e^{-j(\theta-\varphi)/2})$$

d'où $e^{j\theta} + e^{j\varphi} = 2\cos((\theta-\varphi)/2)e^{j(\theta+\varphi)/2}$.
Exemple. Ecrivons sous forme polaire $\alpha = e^{j\frac{\pi}{4}} + e^{7j\frac{\pi}{5}}$. On factorise par l'angle moitié. On a $\alpha = 2\cos(23\pi/40)\, e^{33j\pi/40}$ mais $\cos(23\pi/40) < 0$. On écrit donc la forme polaire comme suit

$$\alpha = 2\cos(23\pi/40 + \pi)\, e^{33j\pi/40 + j\pi} = 2\cos(63\pi/40)\, e^{73j\pi/40}.$$

3.3 Prolongement de l'exponentielle à $\mathbb{C}$

Definition. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $\boxed{e^z = e^{\mathrm{Re}(z)}e^{j\mathrm{Im}(z)}}$.

Proposition 9 *On a :*

- $\forall z_1, z_1 \in \mathbb{C}, e^{z_1+z_2} = e^{z_1}.e^{z_2}$. *(Equation fonctionnelle) ;*
- *Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, on a*
  1. $e^z \neq 0$;
  2. $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$;
  3. $arg(z) = \mathrm{Im}(z)[2\pi]$;
  4. $1/e^z = e^{-z}$;
  5. $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$.

Remarque. Les propriétés 2 et 3 peuvent être résumées sous la forme suivante : $e^z = e^{\mathrm{Re}(z)}e^{j\mathrm{Im}(z)}$ est une écriture sous forme polaire de e^z.

Proposition 10 *(Périodicité de l'exponentielle) Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a $e^{z_1} = e^{z_2}$ si et seulement si* $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ *et* $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)[2\pi]$.

Ce résultat permet de résoudre les équations du type $e^z = \omega$ où $\omega \in \mathbb{C}^*$. On écrit ω sous forme polaire $\omega = re^{j\theta} = e^{\ln(r)+j\theta}$. L'équation $e^z = \omega$ est alors équivalente à $\mathrm{Re}(z) = \ln(z)$ et $\mathrm{Im}(z) = \theta[2\pi]$.

Exemple. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = -7$. Puisque $-7 = e^{\ln(7)+j\pi}$, l'équation $e^z = -7$ admet pour solutions les nombres de la forme $\ln(7) + (2k+1)j\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3.4 Dérivée

Definition. Soit $\gamma : I \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes. Notons $\gamma(t) = \gamma_1(t) + j\gamma_2(t)$, avec $\gamma_1(t) = \mathrm{Re}(\gamma(t))$ et $\gamma_2(t) = \mathrm{Im}(\gamma(t))$. La fonction γ est $\boxed{\text{dérivable}}$ si γ_1 et γ_2 le sont. On a alors

$$\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + j\gamma_2'(t).$$

Remarque. Une fonction polynôme (complexe) est toujours dérivable.

Proposition 11 *Soient $f, g : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables. Alors $\bar{f}$, $f+g$ et $f.g$ le sont aussi et on a*

$$(\bar{f})' = \overline{f'}, \quad (f+g)' = f' + g' \quad \text{et} \quad (fg)' = fg' + f'g.$$

Dans le cas complexe, la dérivée de l'exponentielle est analogue à ce qu'elle est dans le cas réel.

Proposition 12 *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. L'application $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{t\alpha}$ admet des dérivées de tout ordre, on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \gamma^{(n)}(t) = \frac{d^n e^{t\alpha}}{dt^n}(t) = \alpha^n e^{t\alpha}.$$

Exemples.

- Soit l'application $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{jt}$. On a alors $\gamma'(t) = j\gamma(t)$; le vecteur tangent à la courbe (la courbe est un cercle) est orthogonal au vecteur qui joint l'origine au point d'affixe $\gamma(t)$.
- Soit $f(t) = (\alpha t + \beta)e^{\omega t}$ avec α, β et ω des nombres réels. Alors

$$f'(t) = (\alpha\omega t + \beta\omega + \alpha)e^{\omega t}.$$

Proposition 13 *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f(t) = e^{j\omega t}$ vérifie l'équation différentielle $f'' + \omega^2 f = 0$.*

4 Quelques résultats supplémentaires

Les résultats contenus dans cette section ne seront pas utilisés en TD ni posés en contrôle.

Proposition 14 (formule du binôme) *Pour $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$,*

$$(z + z')^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (z')^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} (z')^k.$$

Exemples. $(z + z')^3 = z^3 + 3z^2 z' + 3z(z')^2 + (z')^3$;
$(z + z')^4 = z^4 + 4z^3 z' + 6z^2(z')^2 + 4z(z')^3 + (z')^4$.

4.1 Racines $n$ièmes de l'unité

On désignera par $\mathbb{U}$ l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = 1$. Cet ensemble est représenté géométriquement par le cercle unité de $\mathbb{C}$ (C(O,1)).

Definition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine $n$ième de l'unité tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité (on a $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$).

Par exemple, $\mathbb{U}_1 = \{1\}$, $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$.

Théorème 15 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il y a exactement n racines n-ièmes de l'unité, qui sont 1, $e^{2j\pi/n}$, $e^{4j\pi/n}$, $\ldots$, $e^{2(n-1)j\pi/n}$. Ainsi, en posant $\omega = e^{2j\pi/n}$, on a*

$$\mathbb{U}_n = \{1, \omega, \omega^2, \ldots \omega^{n-1}\} = \{\omega^k \ ; \ 0 \leq k \leq n-1\}.$$

Exemple. $\mathbb{U}_4 = \{1, e^{j\pi/2}, e^{j\pi}, e^{3j\pi/2}\} = \{1, j, -1, -j\}$.

Remarque. Les racines n-ièmes de l'unité sont les affixes des sommets du polygône régulier à n cotés, de centre d'affixe 0, dont un des sommets est le point d'affixe 1.

4.2 Racines $n$ièmes de $A \in \mathbb{C}^*$

Definition. Soit n un entier $n \geq 1$ et A un nombre complexe non nul. L'ensemble des racines n-ièmes de A est

$$\mathcal{R}_n(A) = \{z \in \mathbb{C}, z^n = A\}.$$

Théorème 16 *Soit θ un argument de A. $\mathcal{R}_n(A)$ a exactement n éléments qui sont*

$$|A|^{1/n} exp(j(\theta + 2k\pi)/n), \ 0 \leq k \leq n-1.$$

Proposition 17 *On obtient les n racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul en multipliant l'une d'entre elles par les n racines n-ièmes de l'unité.*

Proposition 18 *Pour $n \geq 2$, la somme de n racines nièmes d'un nombre complexe $A \in \mathbb{C}^*$ est 0.*

4.3 Equations du second degré à coefficients complexes

On considère l'équation

$$az^2 + bz + c = 0,$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Cette équation est équivalente à

$$(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta = 0$, l'équation a une racine double $z = \frac{-b}{2a}$.
Si $\Delta \neq 0$, il existe exactement deux nombres complexes opposés dont le carré vaut Δ. Notons les d et $-d$. L'équation a deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$, qui sont

$$z_1 = \frac{-b + d}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - d}{2a}$$

Calcul des racines carrées de Δ. Si $\Delta \in \mathbb{R}_+^*$, on peut poser $d = \sqrt{\Delta}$ et si $\Delta \in \mathbb{R}_-^*$, on peut poser $d = j\sqrt{-\Delta}$.

Si $\Delta = u + jv \notin \mathbb{R}$, Δ a deux racines carrées opposées qui ne sont pas imaginaires pures, donc Δ a une unique racine carrée de partie réelle > 0. Notons la $a + jb$ ($a > 0$). Comme $(a + jb)^2 = \Delta$, on a

$$a^2 - b^2 = u \tag{4}$$

$$2ab = v \tag{5}$$

D'autre part, $|a + jb|^2 = |\Delta|$ donc

$$a^2 + b^2 = \sqrt{u^2 + v^2}. \tag{6}$$

(4) et (6) permettent de calculer a^2 et b^2. On en déduit a et b, sachant que $a > 0$ et (5) fournissant le signe de b.

4.4 Applications aux calculs trigonométriques

- n étant un entier naturel, on calcule $\cos na$ et $\sin na$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$ en utilisant la formule de Moivre

$$\cos(na) + j\sin(na) = (\cos a + j\sin a)^n$$

et en développant $(\cos a + j\sin a)^n$.

- On linéarise $\cos^n a$, $\sin^n a$ en utilisant les formules d'Euler

$$\cos^n a = \Big(\frac{e^{ja} + e^{-ja}}{2}\Big)^n \quad \text{et} \quad \sin^n a = \Big(\frac{e^{ja} - e^{-ja}}{2j}\Big)^n$$

et en développant $(e^{ja} + e^{-ja})^n$ et $(e^{ja} - e^{-ja})^n$.

-La formule $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ pour $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 1$, permet de calculer les sommes trigonométriques

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = Re(\sum_{k=0}^{n} e^{jk\theta}) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = Im(\sum_{k=0}^{n} e^{jk\theta}).$$

4.5 Mesures d'angles

A, B, C étant trois points distincts du plan, tout argument du nombre complexe $\dfrac{c-a}{b-a}$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Par exemple, le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a}$ est imaginaire pur.

Remarque. $\dfrac{c-a}{b-a}$ et $(c-a)\overline{(b-a)}$ ont même argument.