L1S2 Analyse2
Plan détaillé du cours.

SUITES DE NOMBRES REELS
C 1 : Premières propriétés et exemples.

L'on verra que l'on trouve des suites dans l'économie, la nature, le jeu,...
On en trouve également dans différentes branches des mathématiques, par exemple en théorie des nombres et, tout simplement, dans *l'écriture d'un nombre réel.*

1 Raisonnement par récurrence : rappel.

Les suites étant un "ensemble indexé sur $\mathbb{N}$", le raisonnement par récurrence s'avèrera utile pour démontrer certains résultats.

Démonstration par récurrence : Nous supposerons connus l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels : $0, 1, 2, ...$ et les propriétés des opérations élémentaires : addition, multiplication, soustraction.
On considère une assertion $P(n)$, qui contient la lettre n représentant un entier naturel.

Principe de récurrence. Si on a :
(i) $P(0)$ est vraie
(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$,
alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : Dans le principe de récurrence, (i) peut être remplacé par : "$P(n_0)$ est vraie" et (ii) par : "pour tout entier $n \geqslant n_0$, ...". La conclusion devient : "$P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$".

Principe de récurrence forte. Si on a :
(i) $P(0)$ est vraie
(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $((\forall p \leqslant n\ ,\ P(p)) \Rightarrow P(n+1))$,
alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ici encore, pour conclure que $P(n)$ est vraie pour $n \geqslant n_0$, (i) est remplacé par : "$P(n_0)$ est vraie" et (ii) par : "pour tout entier $n \geqslant n_0$, ($(P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ et $\ldots$et $P(n)) \Rightarrow P(n+1))$".

La récurrence d'ordre 2 en est un cas particulier. Comme elle nous sera parfois utile, en voici une rédaction simplifiée. Si on a :
(i) $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ vraies
(ii) Pour tout $n \geqslant n_0$, $((P(n)$ et $P(n+1)) \Rightarrow P(n+2))$,
alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

2 Définitions et premières propriétés.

2.1 Définitions

Définition 1. Soit $I \subset \mathbb{N}$ une partie infinie de $\mathbb{N}$. Une suite de réels, d'ensemble d'indices I, est une **application** de I dans $\mathbb{R}$.

Notations :

1. On note $(u_n)_{n\in I}$ la suite qui, à l'entier n, fait correspondre le nombre u_n au lieu de $u : I \to \mathbb{R}; \quad n \mapsto u(n)$.
2. Le nombre u_n est appelé le terme (général) d'indice n de la suite $(u_n)_{n\in I}$.

On prendra garde à distinguer une suite (u_n), qui est une fonction, de son image $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$, qui est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Remarque. L'étude d'une suite à valeurs complexes $(z_n)_n$, $z_n \in \mathbb{C}$ peut se ramener à l'étude de deux suites réelles $(\operatorname{Re} z_n)_n$ et $(\operatorname{Im} z_n)_n$.

Il y a différentes façons de se donner une suite.

• **Suites définies explicitement.** On donne l'expression de son terme d'indice n en fonction de n : $u_n = f(n)$.

• **Suites définies par récurrence.** On donne ses premiers termes et une relation de récurrence permettant de calculer un terme en fonction de ceux qui précèdent.

• **Suites définies implicitement.**

La suite est définie par une propriété, par exemple comme solution d'une équation.

Définition 2.
1. On dit que $(u_n)_n$ est une *suite constante* s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; on dit alors que $(u_n)_n$ est la suite constante c. Lorsque $c = 0$ on parle de la *suite nulle.*
2. On dit que $(u_n)_n$ est une *suite stationnaire* s'il existe $c \in \mathbb{R}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $u_n = c$ pour tout entier $n \geqslant n_0$; on dit que $(u_n)_n$ est la suite stationnaire c.

2.2 Opérations sur les suites

OPERATIONS SUR LES SUITES.

Les opérations sur les fonctions permettent de définir des opérations sur les suites.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit la **somme** et le **produit** de suites :
1. $(u_n)_n + (v_n)_n$ est la suite de terme général $u_n + v_n$.
2. $\lambda(u_n)_n$ est la suite de terme gńéral λu_n.
3. $(u_n)_n(v_n)_n$ est la suite de terme général $u_n v_n$.

La **composition** *des fonctions permet aussi de déterminer de nouvelles suites à partir de suites données.*

Si la fonction f est définie en u_n, à partir d'un certain indice N, on peut définir la suite composée $(f(u_n))_{n \geqslant N}$. En particulier pour une suite (u_n) donnée et pour une suite k_n d'entiers, on peut définir la suite de terme général $u(k_n) = u_{k_n}$.

Dans la pratique ces opérations sont d'une grande utilité, elles permettent, en effet, d'envisager l'étude d'une même suite sous des aspects très différents.

2.3 Monotonie

Définition 3. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une propriété P **à partir d'un certain rang**, ou **pour** n **assez grand**, lorsqu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que P soit vérifiée par tous les termes u_n pour $n \geqslant n_0$.

Pour alléger la présentation, on ne considèrera ici, sauf indication contraire, que des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$ *tout entier. Nous laissons au lecteur la réécriture avec "à partir d'un certain rang" ou "pour n assez grand".*

Définition 4. Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite
1. croissante si $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
2. décroissante si $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
3. strictement croissante si $u_n < u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
4. strictement décroissante si $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
5. monotone si elle est croissante ou décroissante.

2.4 Suites bornées

Définition 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite majorée si l'ensemble de ses valeurs admet un majorant. Si M est un majorant de cet ensemble, on dit que M majore la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite minorée si l'ensemble de ses valeurs admet un minorant. Si m est un minorant de cet ensemble, on dit que m minore la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite bornée si l'ensemble de ses valeurs est borné, c'est-à-dire s'il existe un réel $K > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant K$.

Remarque. Une suite réelle est bornée si, et seulement si, elle est minorée et majorée.

3 Suites arithmético-géométriques.

Définition 6. On appelle suite arithmético-géométrique (réelle) toute suite $(u_n)_n$ définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = au_n + b$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, où a et b sont deux nombres (réels) fixés.

On distingue trois cas. Les deux premiers sont bien connus.

1. *Si $a = 1$, la suite définie par la relation $u_{n+1} = u_n + b$ est appelée suite*
2. *Si $b = 0$, la suite définie par la relation $u_{n+1} = au_n$ est appelée suite*
3. *Cas général :*

Supposons que $a \neq 1$ et $b \neq 0$. L'idée est qu'il suffit de trouver une suite particulière $(v_n)_n$ qui vérifie la relation $v_{n+1} = av_n + b$ pour connaître toutes les suites. En effet, on a alors

$$u_{n+1} - v_{n+1} = (au_n + b) - (av_n + b) = a(u_n - v_n)\,.$$

La suite de terme général $w_n = u_n - v_n$ est donc géométrique, de raison a, et on a $u_n - v_n = (u_0 - v_0)a^n$. Inversement, on vérifie immédiatement qu'une suite de terme général de la forme $u_n = v_n = a^n(u_0 - v_0)$ satisfait la relation de récurrence souhaitée ; il ne reste donc plus qu'à trouver une suite particulière (v_n) et l'idée est ici de la chercher sous la forme la plus simple possible, c'est-à-dire constante. On pose donc $v_n = l$, avec l solution de l'équation $l = al + b$, ce qui est toujouts possible car $a \neq 1$. On a donc le résultat suivant :

Proposition 1. *Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq 1$ et $(u_n)_n$ une suite réelle qui vérifie la relation $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{b}{1-a} + a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a} \right)\,.$$

4 Autres constructions de suites.

4.1 Suites $(u_{n+1} - u_n)_n$ et $(u_0 + u_1 + ... + u_n)_n$.

• *A toute suite $(u_n)_n$ on associe la suite de ses accroissements successifs $(u_{n+1} - u_n)_n$. Cette suite donne des renseignements pour l'étude de la suite $(u_n)_n$. Par exemple :*

La suite $(u_n)_n$ est croissante si et seulement si tous les termes de la suite $(u_{n+1} - u_n)_n$ sont positifs ou nuls.

• *Pour toute suite (u_n) il existe une unique suite (S_n) telle que*

$$S_0 = u_0 \quad \text{et pour } n \geqslant 1 \quad S_n - S_{n-1} = u_n\,.$$

A savoir :

$$S_0 = u_0 \qquad \text{et } S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\,.$$

4.2 Suites $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ et $(u_0 u_1 ... u_n)_n$.

• *A toute suite $(u_n)_n$ dont aucun terme n'est nul, on associe la suite de ses rapports successifs $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_n$. Cette suite donne des renseignements pour l'étude de la suite $(u_n)_n$. Par exemple :*

Soit une suite $(u_n)_n$ dont tous les termes sont strictement positifs. Alors $(u_n)_n$ est décroissante si et seulement si $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_n$ est majorée par 1 .

• *Pour toute suite (u_n) il existe une unique suite (P_n) telle que*

$$P_0 = u_0 \quad \text{et pour } n \geqslant 1 \quad P_n = u_n P_{n-1}\,.$$

A savoir :

$$P_0 = u_0 \qquad \text{et } S_n = u_0 u_1 ... u_n = \Pi_{k=0}^{n} u_k\,.$$

4.3 Suites (u_n) telles que $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$.

Considérons une suite $(u_n)_n$ pour laquelle il existe un réel r tel que la suite $(v_n) = (u_{n+1} - ru_n)$ soit une suite géométrique de raison s. Pour tout indice n nous avons

$$v_{n+1} = sv_n$$

soit : $u_{n+2} - ru_{n+1} = s(u_{n+1} - ru_n)$ ou : $u_{n+2} = (r+s)u_{n+1} - rsu_n$, relation de la forme $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Idée *Inversement, pour chercher les suites $(u_n)_n$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, $b \neq 0$, on s'efforce d'écrire cette relation sous la forme $u_{n+2} - ru_{n+1} = s(u_{n+1} - ru_n)$ en choisissant r et s tels que $r + s = a$, $rs = -b$, c'est-à-dire solutions de l'équation $x^2 = ax + b$.*

Résultat

1. *Si l'équation $x^2 - ax - b = 0$ admet deux racines réelles distinctes r, s, alors les suites $(u_n)_n$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, sont de la forme $(\alpha r^n + \beta s^n)_n$, pour deux réels α, β, car la suite $(u_n/r^n)_n$ est arithmétique. Et réciproquement.*
2. *Si l'équation $x^2 - ax - b = 0$ admet une seule solution $r = a/2$, les suites (u_n) telles que $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, sont de la forme $(\alpha r^n + \beta nr^n)_n$, pour deux réels α, β. Et réciproquement.*
3. *Si l'équation $x^2 - ax - b = 0$ n'admet pas de solution réelle, on fera intervenir des suites complexes.*

5 Suites définies par itération $u_{n+1} = f(u_n)$.

Considérons une partie E de $\mathbb{R}$, $a \in E$, une application f de E dans E. Il existe une et une seule suite (u_n) telle que :

$$u_0 = a, \quad u_{n+1} = f(u_n), \quad n \geqslant 0$$

à savoir la suite (u_n) définie par :
$u_n = f^n(a) = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n\ fois}(a), \quad n \geqslant 0$, *avec la convention $f^0(a) = a$.*

On dit que la suite (u_n) est la suite obtenue par itération de f à partir de a.

Représentation graphique

On considère le graphe de f dans un repère orthonormé. La "verticale" d'équation $x = u_0$ coupe la courbe déquation $y = f(x)$ au point $M_0(u_0, f(u_0))$; or $f(u_0) = u_1$. Donc "l'horizontale" passant par M_0, a pour équation $y = u_1$ et coupe la première bissectrice au point de coordonnées (u_1, u_1). A partir de u_1, nous pouvons recommencer la construction analogue, nous obtiendrons u_2, puis u_3 et ainsi de suite. Nous construisons ainsi une suite de points $M_0(u_0, u_1)$, $M_1(u_1, u_2)$,...,$M_n(u_n, u_{n+1})$,..., qui permettent de visualiser la suite (u_n) et la suite des accroissements $(u_{n+1} - u_n)$, et, surtout, comme on le verra dans la suite son comportement lorsque n augmente indéfiniment.

6 Sous-suites ou suites extraites. Définition et propriétés

Commençons par une définition qui formalise l'idée qu'à partir d'une suite réelle on obtient encore une suite en ne retenant qu'une partie des termes de la suite d'origine.

Soit (u_n) une suite réelle.

Définition 7. Si u est une suite, on appelle **sous-suite**, ou **suite extraite**, de u, toute suite $u \circ \varphi$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application *strictement croissante*. Autrement dit, une suite extraite de (u_n) est une suite de la forme (v_k) avec $v_k = u_{\varphi(k)}$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application *strictement croissante*.

Remarque.

1. Penser à : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n+1) > \varphi(n)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$ (récurrence)
3. Si (k_n) est une suite strictement croissante de $\mathbb{N}$ alors (u_{k_n}) est une suite extraite de (u_n).