Université d'Avignon – Faculté des Sciences Année 2020-2021
L1S2 Analyse 2

CONTROLE CONTINU 2

Durée : 1h. Tous documents, calculatrices (sauf type collège) et téléphones interdits. La note tiendra compte de la rédaction.

Exercice 1. En justifiant, de façon précise, déterminer la nature et la limite éventuelle des suites de termes généraux :
1) $u_n = -2 + \sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$;
2) $u_n = -3n^2 + n^2\sin(n)$;
3) $u_n = \cos(n\pi/3)$.

Exercice 2. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,9]$ par

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}.$$

1) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,9]$.
Soit la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par :
$u_0 = 0$ et pour tout entier naturel $n,\ u_{n+1} = f(u_n)$.
2) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
Pour tout entier naturel $n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 9$.
En déduire que la suite (u_n) converge.
3) On note $l = \lim u_n$. Trouver la valeur de l en justifiant la réponse.

Exercice 3. On rappelle que si $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_n \to 0$ alors : $e^{u_n} - 1 \sim u_n$; $1 - \cos(u_n) \sim \dfrac{u_n^2}{2}$; $\ln(1+u_n) \sim u_n$.
1) Montrer que $\dfrac{2}{n^3} - \dfrac{1}{n^4} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
2) Montrer que $\dfrac{4}{n^4} + \dfrac{2}{n^5} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$.
3) A l'aide des équivalents, déterminer la limite de la suite de terme général $\dfrac{1 - \cos\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^3} - \dfrac{1}{n^4}\right)}{\exp\left(\dfrac{4}{n^4} + \dfrac{2}{n^5}\right) - 1}$.
4) Montrer, à l'aide de la définition, que $\ln(n^2+n) \sim 2\ln n$.

Exercice bonus On considère les deux suites définies par, $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n^2}$.
Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Barême indicatif : Ex 1 : 6pts Ex 2 : 7pts Ex 3 : 9pts