Chap. 1 Fonctions numériques.

L1S1 Portails Math-Info & Math-Physique
Analyse 1

2022-23

1 Définition d'une fonction.

1.1 Intervalles

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont de la forme $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$ (a et b sont des nombres réels tels que $a \leq b$), $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$, $]a, +\infty[$, $[a, +\infty[$ (a est un nombre réel), $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Remarque. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour $c, d \in I$, l'intervalle $[c, d]$ est inclus dans I.

1.2 Fonction, courbe représentative

Les fonctions permettent de définir des liens entre certaines grandeurs pouvant varier. Par exemple, on peut exprimer la variation de la pression avec l'altitude ou l'évolution d'une température dans le temps à l'aide d'une fonction.

On considère une partie de $\mathbb{R}$, notée D. Un fonction à valeurs réelles f d'ensemble de définition D (ou définie sur D) associe à chaque nombre réel x appartenant à D un nombre réel y, noté $f(x)$.

Définir une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles, c'est donc donner son ensemble de définition $D \subset \mathbb{R}$, ainsi qu'une "règle" (souvent une formule mathématique) qui permet d'associer à chaque donnée x dans D une valeur $f(x)$ dans $\mathbb{R}$.

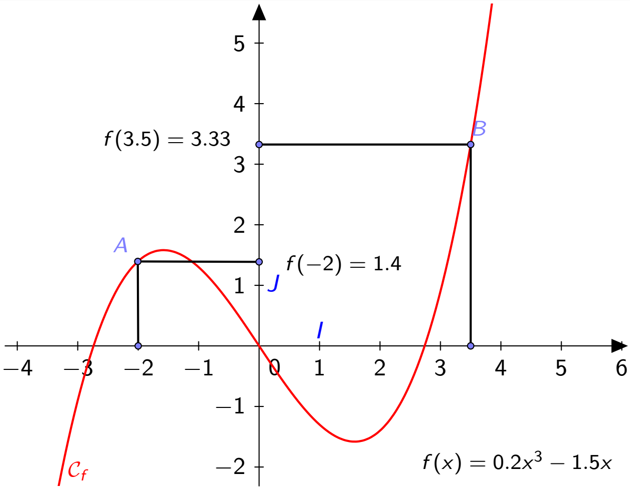
Remarques.

- La notation $f : D \to E$ signifiera pour nous que f est une fonction d'ensemble de définition D, à valeurs dans E (en théorie des ensembles, on parle d'application de D dans E : D est l'ensemble de départ, E celui d'arrivée). Pour les fonctions à valeurs réelles, E est $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$.
- $f(x)$ n'est pas une fonction : c'est un nombre réel qui est la valeur de la fonction f en x.
- On peut utiliser la notation $(x \mapsto f(x))$ pour désigner une fonction . Lorsque l'ensemble de définition n'est pas précisé, il est implicitement égal à l'ensemble de tous les réels x tels que $f(x)$ existe.

Exemples. i) La fonction carré est la fonction $(x \mapsto x^2)$, d'ensemble de définition $\mathbb{R}$. La fonction cube est la fonction $(x \mapsto x^3)$, d'ensemble de définition $\mathbb{R}$.

ii) La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{2t+1}{t-1}\right)$ a implicitement pour ensemble de définition $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Courbe représentative. Le plan est muni d'un repère (en général orthonormé) (O, OI, OJ). La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur D est l'ensemble des points de coordonnées (x, y), où x appartient à D et $y = f(x)$.



Image, antécédent. Soit f une fonction à valeurs réelles, d'ensemble de définition D.

- Pour $a \in D$, $f(a)$ est appelé l'image de a par la fonction f.
- Pour $b \in \mathbb{R}$, on appelle antécédent par f de b tout élément x de D tel que $f(x) = b$.

Un élément a de l'ensemble de définition D de f a exactement une image par f.

Graphiquement, l'image de a est l'ordonnée du point d'intersection de la courbe représentative de f avec la droite verticale d'équation $x = a$

Un réel b peut avoir zéro, un, plusieurs antécédent(s), voire une infinité.

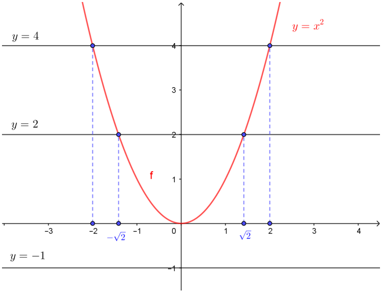
Graphiquement, les antécédents de b sont les abscisses des points d'intersection (s'ils existent) de la courbe représentative de f avec la droite horizontale d'équation $y = b$

Si A est une partie de D, on appelle ensemble image de A par f et on note $f(A)$ l'ensemble des valeurs prises par la fonction f sur A :

$$f(A) \stackrel{def}{=} \{f(x)\ ;\ x \in A\}.$$

$f(A)$ est l'ensemble de tous les réels ayant au moins un antécédent dans A par f.

Exemple. Considérons la fonction carré $f : x \mapsto x^2$.



- L'image de -2 par f est 4.
- 4 a deux antécédents : -2 et 2.
- 2 a deux antécédents : $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.
- 0 a un antécédent : 0.
- -1 n'a aucun antécédent.
- $f([-1,1]) = [0,1]$.
- $f([-1,2[) = [0,4[$.
- $f(]-2,-1[) =]1,4[$.

Restrictions d'une fonction. Etant données une fonction f d'ensemble de définition D et une partie D' de D, la restriction de f à D', notée $f_{|D'}$ est la fonction d'ensemble de définition D', qui à tout $x \in D'$ associe $f(x)$.

1.3 Premiers exemples

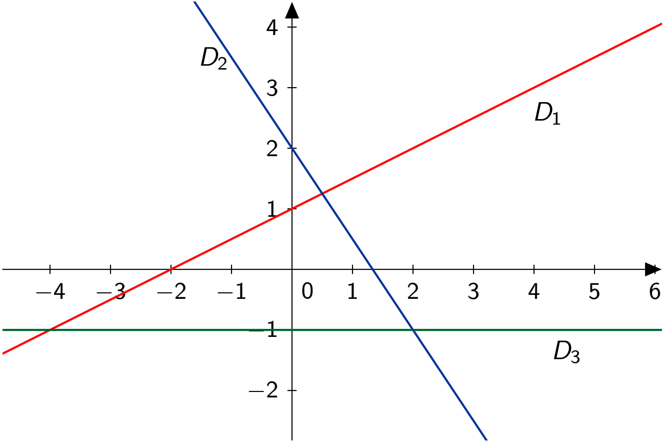
a) Fonctions affines

Une fonction affine est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui à tout nombre réel x associe $ax + b$, où a et b sont deux nombres réels fixés.

Exemples. Les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,5x + 4$ et $g(x) = -x + 1$ sont des fonctions affines.

Remarque. i) Lorsque $a = 0$, on a $f(x) = b$ pour tout nombre réel x : la fonction f est alors constante.
ii) Lorsque $b = 0$, on a $f(x) = ax$ pour tout nombre réel x : on dit alors que la fonction f est linéaire : elle vérifie $f(x + x') = f(x) + f(x')$; $f(cx) = cf(x)$.

Propriété. On considère la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$.
La courbe représentative de f dans un repère du plan est une droite D du plan. De plus si Q et Q' sont deux points distincts de D de coordonnées respectives (x, y) et (x', y'), on a $(y' - y)/(x' - x) = a$. On dit que la droite D est de pente (ou coefficient directeur) a.



D_1 est la droite d'équation $y = 0,5x + 1$, elle est de pente $0,5 = 1/2$. C'est la courbe représentative de la fonction affine f définie par $f(x) = 0,5x + 1$.

D_2 est la droite d'équation $y = -1,5x + 2$. Elle est de pente $-1,5 = -3/2$.

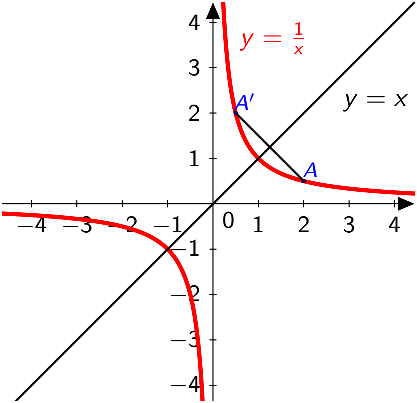
D_3 est la droite d'équation $y = -1$, elle est de pente 0 (c'est une droite horizontale, c'est-à-dire parallèle à l'axe des abscisses).

Toute droite non verticale est la courbe représentative d'une fonction affine.

b) La fonction inverse

La fonction inverse est la fonction $\left(x \mapsto \dfrac{1}{x}\right)$, définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$. On a ainsi $f(1) = 1$, $f(2) = 0,5$, $f(0,5) = 2$, $f(-1) = -1$, $f(-4) = -0,25$ ...

Courbe représentative.



c) La fonction racine carrée

Si a est un nombre réel positif ou nul, il existe un unique nombre réel positif ou nul b tel que $b^2 = a$; b est appelé la racine carrée de a, et est noté $\sqrt{a}$. Pour $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence

$$\sqrt{a} = b \iff \begin{cases} b^2 = a \\ b \geq 0 \end{cases}$$

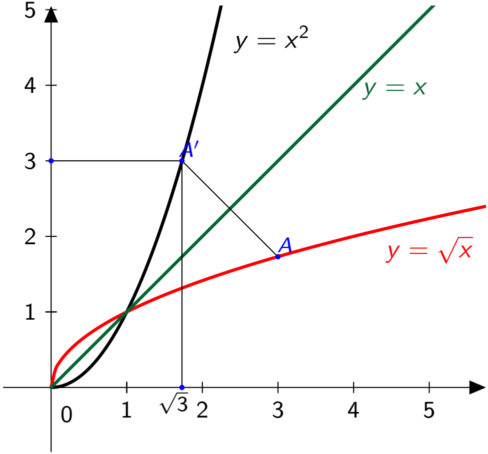
La fonction racine carrée est la fonction $(x \mapsto \sqrt{x})$, définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ (et à valeurs dans $[0, +\infty[$). On a

$$\sqrt{0} = 0 \quad , \quad \sqrt{1/4} = 1/2 \quad , \quad \sqrt{1} = 1 \quad , \quad \sqrt{4} = 2 \quad , \quad \sqrt{9} = 3 \ldots$$

Propriétés.

- Pour $x, y \in [0, +\infty[$, $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$.
- Pour $x \in [0, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$, $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

Courbe représentative.



A' est le point de la courbe représentative de la fonction carré d'ordonnée 3. Son abscisse est $\sqrt{3}$. A est le symétrique de A' par rapport à la droite d'équation $y = x$; A est sur la courbe représentative de la fonction racine carrée.

d) La fonction valeur absolue

La valeur absolue d'un nombre réel a est définie par : $|a| = \max(a, -a)$, c'est-à-dire : $|a| = a$ si $a \geq 0$ et $|a| = -a$ si $a \leq 0$.

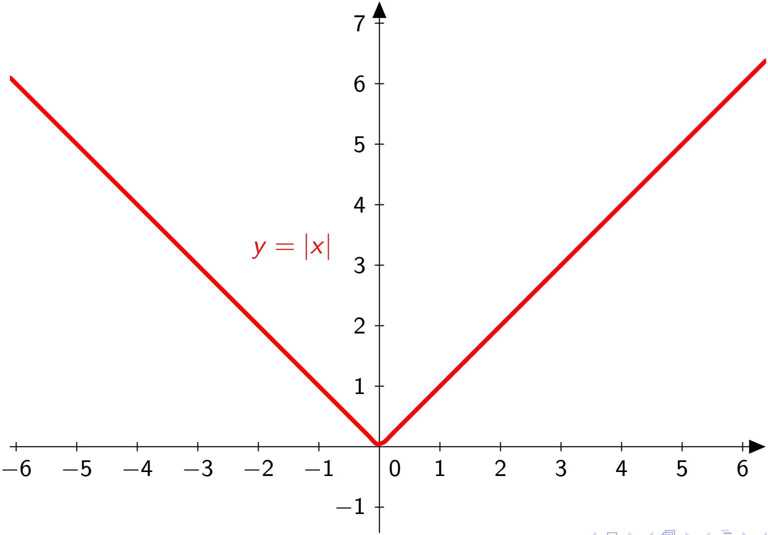
Propriétés.

- $|a| \geq 0$; $|a| = |-a|$; $|a|^2 = a^2$; $\sqrt{a^2} = |a|$.
- Inégalité triangulaire : $|a+b| \leq |a| + |b|$
- $|ab| = |a||b|$; si $b \neq 0$, $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

Valeur absolue et distance. On considère une droite D graduée de repère (O, I), avec $OI = 1$. Si M est un point de D, d'abscisse x, la distance OM entre l'origine et M est égale à $|x|$. Si A et B sont deux points de D d'abscisses respectives a et b, alors $AB = |b - a|$.

La fonction valeur absolue est la fonction $(x \mapsto |x|)$, définie sur $\mathbb{R}$.

La courbe représentative de la fonction valeur absolue est constituée de deux demi-droites :



Remarques.

- Soit $a, r \in \mathbb{R}$, avec $r > 0$. On a, pour x réel, les équivalences suivantes.

$$|x| \leq r \iff x \in [-r, r] \quad \text{et} \quad |x| < r \iff x \in]-r, r[\,;$$

$$|x-a| \leq r \iff x \in [a-r, a+r] \quad \text{et} \quad |x-a| < r \iff x \in]a-r, a+r[\,.$$

Exemple. L'ensemble des réels x vérifiant $|x-2| < 3$ est l'intervalle $]2-3, 2+3[=]-1, 5[$.

- Pour x et y réels on a les équivalences suivantes

$$|x| = |y| \iff x^2 = y^2 \quad , \quad |x| \leq |y| \iff x^2 \leq y^2 \quad ,$$

$$|x| < |y| \iff x^2 < y^2\,.$$

Exercice. Etant donnés deux réels distincts a et b, montrer l'équivalence suivante

$$|x-a| = |x-b| \iff x = \frac{a+b}{2}\,.$$

2 Opérations sur les fonctions.

2.1 Somme, produit, combinaison linéaire

- Somme et produit. On considère deux fonctions $f, g : D \to \mathbb{R}$.
  La fonction somme $f + g$ est définie sur D et envoie x sur $f(x) + g(x)$:

  $$\forall x \in D\,,\ (f+g)(x) = f(x) + g(x)\,.$$

  La fonction produit fg est définie sur D et envoie x sur $f(x)g(x)$:

  $$\forall x \in D\,,\ (fg)(x) = f(x)g(x)\,.$$

  Remarque. Dans le cas où f est g ont des ensembles de définition D_f et D_g distincts, l'ensemble de définition de $f + g$ et fg est l'intersection $D_f \cap D_g$ des ensembles de définition de f et g : $D_{f+g} = D_{fg} = D_f \cap D_g$.

- Multiplication par une constante. Etant donnée une fonction $f : D \to \mathbb{R}$, pour tout nombre réel c, la fonction $c\,f : D \to \mathbb{R}$ envoie x sur $c\,f(x)$:

  $$\forall c \in \mathbb{R}\,,\ \forall x \in D\,,\ (cf)(x) = cf(x)\,.$$

Si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont des fonctions réelles définies sur D, on appelle combinaison linéaire de $f_1, \ldots, f_n$ toute fonction f de la forme $f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n$, où $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont des nombres réels.

- Quotient. On considère deux fonctions $f, g : D \to \mathbb{R}$. La fonction quotient $\dfrac{f}{g}$ est définie sur

$$D' = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$$

et envoie x sur $\dfrac{f(x)}{g(x)}$:

$$\forall x \in D', \ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} .$$

Remarque. Dans le cas où f et g ont des ensembles de définition D_f et D_g distincts, l'ensemble de définition de f/g est
$D' := \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\}$.

Pour $c \in \mathbb{R}$, $\dfrac{c}{g}$ désigne le quotient de la fonction constante prenant la valeur c par la fonction g.

2.2 Composée de deux fonctions

On considère une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ et une fonction $g : D' \to \mathbb{R}$. La fonction composée $g \circ f$ est définie sur $D_{g \circ f} = \{x \in D \,|\, f(x) \in D'\}$ par

$$g \circ f(x) = g(f(x))\,.$$

Pour obtenir $z = g \circ f(x)$, on envoie d'abord x par f sur $y = f(x)$, puis y est envoyé par g sur $g(y) = z$:

$$\begin{array}{ccccc} D_{g \circ f} \subset D & \xrightarrow{f} & D' & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) & \mapsto & z = g(y) = g \circ f(x) \end{array}$$

Exemples. i) Considérons les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x - 1$. Alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 1\,.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1\,.$$

On voit sur cet exemple que $g \circ f \neq f \circ g$.

ii) Considérons les fonctions $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \right.$ et $v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1/x \end{array} \right.$.

$v \circ u$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et, pour $x \neq -1$,

$$v \circ u(x) = v(x+1) = \frac{1}{x+1}\,.$$

$u \circ v$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et, pour $x \neq 0$,

$$u \circ v(x) = u(1/x) = \frac{1}{x} + 1\,.$$

iii) Considérons les fonctions $f : x \mapsto x^2 + 3$ et $g : x \mapsto \sqrt{x+1}$, d'ensembles de définition respectifs $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = [-1, +\infty[$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3 \geq 3 \geq -1$, c'est-à-dire $f(x) \in D_g$. La fonction $g \circ f$ est donc définie sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 3) = \sqrt{x^2 + 4}\,.$$

L'ensemble de définition de $f \circ g$ est l'ensemble des $x \in D_g$ tels que $g(x) \in D_f$. Comme $D_f = \mathbb{R}$, $f \circ g$ est définie sur $D_g = [-1, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1, +\infty[\,,\ f \circ g(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt{x+1}) = (\sqrt{x+1})^2 + 3 \\ &= (x+1) + 3 = x + 4\,. \end{aligned}$$

Remarque. Ici l'ensemble de définition de $f \circ g$ est $[-1, +\infty[$, bien que $x + 4$ puisse être défini pour tout réel x : la fonction $f \circ g$ est la restriction à l'intervalle $[-1, +\infty[$ de la fonction $(x \mapsto x + 4)$.

On a vu avec les exemples précédents qu'il n'y a aucune raison que les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ soient égales. Elles peuvent d'ailleurs ne pas avoir le même ensemble de définition...

La composition de fonctions possède en revanche la propriété suivante (associativité).

Les fonctions $(h \circ g) \circ f$ et $h \circ (g \circ f)$ ont le même ensemble de définition et sont égales :

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)\,.$$

On peut donc se passer des parenthèses et noter cette composée de trois fonctions $h \circ g \circ f$. On a

$$h \circ g \circ f(x) = h(g(f(x)))\,.$$

En notant D_f, D_g et D_h les ensembles de définition de f, g et h, l'ensemble de définition de $h \circ g \circ f$ est l'ensemble des réels x tels que $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$ et $g(f(x)) \in D_h$.

3 Quelques propriétés de fonctions

3.1 Fonctions paires, fonctions impaires

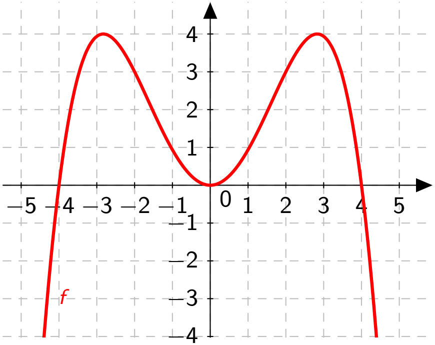
Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite paire (respectivement impaire) lorsque :

i) $\forall x \in D\,,\ -x \in D$ (symétrie de l'ensemble de définition D)

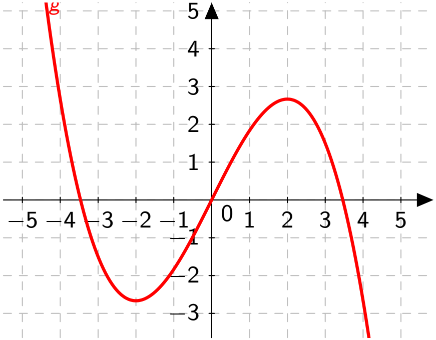
ii) $\forall x \in D\,,\ f(-x) = f(x)$ (respectivement $\forall x \in D\,,\ f(-x) = -f(x)$).

Exemples. La fonction $(x \mapsto x^2)$, définie sur $\mathbb{R}$, est paire.
La fonction $(x \mapsto x^3)$, définie sur $\mathbb{R}$, est impaire.

Interprétation graphique. La courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : si $M(x, y)$ est sur $\mathcal{C}$, alors $M(-x, y)$ aussi.
La courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine 0 : si $M(x, y)$ est sur $\mathcal{C}$, alors $M(-x, -y)$ aussi.



f fonction paire



g fonction impaire

Exercice. Que peut-on dire de la somme de deux fonctions paires (resp. impaires)? Du produit de deux fonctions paires (resp. impaires)? Du produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire?

3.2 Fonctions périodiques

i) Soit T un nombre réel strictement positif. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite périodique de période T (ou T-périodique) lorsque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x+T) = f(x)$$

ii) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite périodique s'il existe un nombre réel $T > 0$ tel que f soit T-périodique.

Propriété. Si f est T-périodique, alors

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \; \forall x \in \mathbb{R}, \; f(x+nT) = f(x) \,.$$

Période minimale. On dit que $T_m > 0$ est la période minimale de f si f est T_m-périodique et toute période de f est supérieure ou égale à T_m. Dans ce cas, on peut montrer que les périodes de f sont : $T_m, 2T_m, 3T_m, \ldots$.

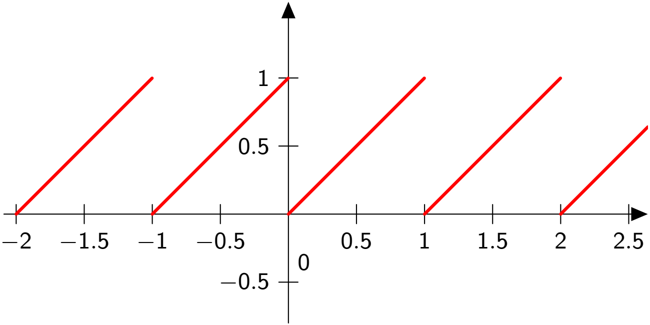
Interprétation graphique. La courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère (O, I, J) d'une fonction T-périodique est invariante par la translation horizontale de vecteur $\vec{u} = T\overrightarrow{OI}$:

$$M(x,y) \in \mathcal{C} \iff M(x+T, y) \in \mathcal{C} \,.$$

Exemple. On rappelle que la partie entière $E(x)$ d'un nombre réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x. On a donc $E(x) \in \mathbb{Z}$ et $E(x) \leq x < E(x) + 1$. Par exemple $E(3,205) = 3$, $E(-1,59) = -2$.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - E(x)$ est caractérisée par les deux propriétés suivantes :

(i) $\forall x \in [0, 1[\,, f(x) = x$ (ii) f est périodique de période 1.



Remarque. La propriété de T-périodicité peut être aussi définie pour des fonctions d'ensemble de définition $D \neq \mathbb{R}$: il faut avoir, pour tout $x \in D$, $x \pm T \in D$ et, pour tout $x \in D$, $f(x + T) = f(x)$.

3.3 Fonctions bornées

a) Comparaison de deux fonctions. On considère trois fonctions $f, g, h : D \to \mathbb{R}$.

- On dit que f est majorée par g (notation : $f \leq g$) si :

$$\forall x \in D\,,\ f(x) \leq g(x)\,.$$

  Interprétation graphique : la courbe représentative de g est au-dessus de celle de f.

- On dit que f est minorée par h (notation : $f \geq h$) si :

$$\forall x \in D\,,\ f(x) \geq h(x)\,.$$

  Interprétation graphique : la courbe représentative de h est au-dessous de celle de f.

- On dit que f est à valeurs positives (resp. négatives), ou simplement que f est positive (resp. négative) si :

$$\forall x \in D\,,\ f(x) \geq 0 \qquad (\text{resp.}\quad \forall x \in D\,,\ f(x) \leq 0)\,.$$

Remarque. Contrairement à un nombre réel, une fonction peut n'être ni positive, ni négative. Par exemple, la fonction identité $id : x \mapsto x$, définie sur $\mathbb{R}$, n'est pas positive (car $id(-1) < 0$), ni négative (car $id(1) > 0$).

- Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite à valeurs strictement positives (resp. strictement négatives) si :

$$\forall x \in D\,,\ f(x) > 0 \qquad (\text{resp.}\quad \forall x \in D\,,\ f(x) < 0)\,.$$

b) Fonctions minorées , majorées , bornées.

- Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite majorée s'il existe une fonction constante qui majore f, c'est-à-dire s'il existe un nombre réel M tel que $\forall x \in D\,,\ f(x) \leq M$; on dit alors que M est un majorant de f.
- Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite minorée s'il existe une fonction constante qui minore f, c'est-à-dire s'il existe un nombre réel m tel que $\forall x \in D\,,\ f(x) \geq m$; on dit alors que m est un minorant de f.

Exemples. La fonction $f_1 : \begin{cases}]-\infty, 0[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1/x \end{cases}$ est majorée (de majorant 0) et non minorée.

La fonction $f_2 : \begin{cases}]0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1/x \end{cases}$ est minorée (de minorant 0) et non majorée.

Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite bornée si elle est à la fois minorée et majorée. Cette propriété équivaut à l'existence d'un réel $C \geq 0$ tel que

$$\forall x \in D\,, \ |f(x)| \leq C\,.$$

3.4 Fonctions monotones

On considère une fonction $f : D \to \mathbb{R}$.

La fonction f est dite constante si $f(x)$ ne dépend pas de x dans D. En d'autres termes :

$$\text{pour tous } x_1, x_2 \in D\,,\ f(x_1) = f(x_2)\,.$$

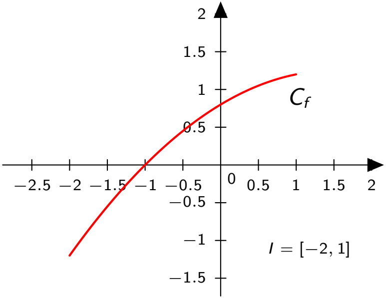
La fonction f est dite croissante (respectivement strictement croissante) si $f(x)$ croît (resp. croît strictement) lorsque x croît dans D. En d'autres termes :

$$\text{pour tous } x_1, x_2 \in D\,,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \text{ (resp. } f(x_1) < f(x_2))\,.$$

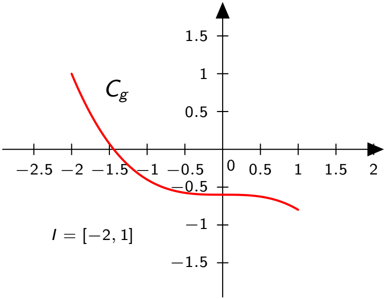
La fonction f est dite décroissante (resp. strictement décroissante) si $f(x)$ décroît (resp. décroît strictement) lorsque x croît dans D. En d'autres termes :

$$\text{pour tous } x_1, x_2 \in D\,,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \text{ (resp. } f(x_1) > f(x_2))\,.$$

La fonction f est dite monotone (resp. strictement monotone) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).



Exemple de courbe représentative d'une fonction croissante définie sur $[-2, 1]$.



Exemple de courbe représentative d'une fonction g décroissante définie sur $[-2, 1]$.

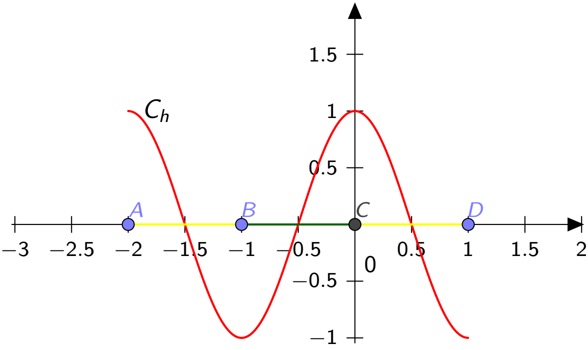
Propriétés.

- Si $u, v : D \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions croissantes (resp. décroissantes), alors la fonction $u + v$ est croissante (resp. décroissante). De plus si la croissance (resp. la décroissance) est stricte pour au moins une des deux, la croissance (resp. la décroissance) est stricte pour la somme $u + v$.
- Fixons un nombre réel c. La fonction $u + c$ a le même sens de variation que u.
- Fixons un nombre réel k strictement positif. La fonction ku a le même sens de variation que u. Par exemple, si la fonction u est strictement croissante, la fonction $3u$ est aussi strictement croissante. Si la fonction u est décroissante sur I, la fonction $4u$ est aussi décroissante sur I.
- Fixons un nombre réel k strictement négatif. La fonction ku a un sens de variation opposé à celui de u. Par exemple, si la fonction u est croissante, la fonction $-u$ est décroissante. Si la fonction u est strictement décroissante, la fonction $-2u$ est strictement croissante.
- La composée de deux fonctions croissantes est croissante. La composée de deux fonctions décroissantes est croissante. La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante.

Montrons par exemple que que si $f : D \to D'$ est croissante et $g : D' \to \mathbb{R}$ est décroissante, alors $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ est décroissante.

Soit $x_1, x_2 \in D$, tels que $x_1 < x_2$. La fonction f étant croissante, on a $f(x_1) \leq f(x_2)$, avec $f(x_1), f(x_2) \in D'$. La fonction $g : D' \to \mathbb{R}$ étant décroissante, l'inégalité $f(x_1) \leq f(x_2)$ entraîne $g(f(x_1)) \geq g(f(x_2))$, c'est-à-dire
$g \circ f(x_1) \geq g \circ f(x_2)$.
On a montré que pour tous $x_1, x_2 \in D$ tels que $x_1 < x_2$, $g \circ f(x_1) \geq g \circ f(x_2)$. La fonction $g \circ f$ est donc décroissante.

Soit une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ et soit I une partie de D (généralement un intervalle). On dit que f est (strictement) croissante sur I lorsque la restriction de f à I est (strictement) croissante. On définit de même la décroissance et la décroissance stricte sur I.



$I_1 = [-2, -1]$, $I_2 = [-1, 0]$ $\quad I_3 = [0, 1]$

Exemple de courbe représentative d'une fonction h qui n'est pas monotone sur $[-2, 1]$. La fonction h est strictement décroissante sur $[-2, -1]$, strictement croissante sur $[-1, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, 1]$.

Exemples.

i) Une fonction affine ($x \mapsto ax + b$) est strictement croissante si $a > 0$, strictement décroissante si $a < 0$, constante si $a = 0$.

ii) La fonction cube ($x \mapsto x^3$) est strictement croissante.

iii) La fonction carré ($x \mapsto x^2$) est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. De même pour la fonction valeur absolue ($x \mapsto |x|$).

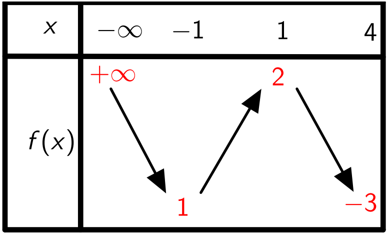
iv) La fonction inverse (définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$) n'est pas monotone. Cependant elle est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Remarque. Si f est strictement croissante sur I, alors pour tous $x, y \in I$,
$x < y \iff f(x) < f(y)$.
Si f est strictement décroissante sur I, alors pour tous $x, y \in I$,
$x < y \iff f(x) > f(y)$.

Tableau de variation d'une fonction

Etudier les variations d'une fonction f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$, c'est déterminer les intervalles sur lesquels f est croissante et les intervalles sur lesquels f est décroissante. Les variations de f sont représentées par un tableau de variation.

Exemple d'une fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty, 4]$.



Ce tableau de variation signifie que f est (strictement) décroissante sur l'intervalle $]-\infty, -1]$, (strictement) croissante sur l'intervalle $[-1, 1]$ et (strictement) décroissante sur l'intervalle $[1, 4]$.

Les indications en rouge donnent les valeurs de f en -1, 1 et 4, ainsi que la limite de f en $-\infty$: $f(-1) = 1$, $f(1) = 2$ et $f(4) = -3$; enfin $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, c'est-à-dire que "$f(x)$ devient très grand lorsque x devient très petit".

4 Fonctions polynomiales, fonctions rationnelles

4.1 Fonctions polynomiales

a) On appelle fonction polynomiale de degré n toute fonction (définie sur $\mathbb{R}$) de la forme $x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels, avec $a_n \neq 0$.

Remarque. La fonction nulle est aussi considérée comme une fonction polynomiale, de degré non défini (on considère parfois que ce degré est $-\infty$).

Exemples.

- Toute fonction affine $(x \mapsto ax + b)$ est une fonction polynomiale, de degré 1 si $a \neq 0$, de degré 0 si $a = 0$ et $b \neq 0$.
- La fonction $x \mapsto (x - 1)(x + 3) = x^2 + 2x - 3$ est une fonction polynomiale de degré 2.
- La fonction $x \mapsto 3 - 2x + 0,5x^2 - x^4 + 4x^5$ est une fonction poynomiale de degré 5.

Pour une fonction polynomiale donnée, les coefficients a_i de la définition précédente sont uniques :

Théorème

On considère deux fonctions polynomiales $f : x \mapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ et $g : x \mapsto b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$. Si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $a_i = b_i$ pour $0 \leq i \leq n$.

Propriétés

- Toute combinaison linéaire de fonctions polynomiales est une fonction polynomiale. En particulier, la somme de deux fonctions polynomiales est polynomiale.
- Le produit de deux fonctions polynomiales f et g est une fonction polynomiale, dont le degré (si ni f ni g n'est la fonction nulle) est la somme des degrés de f et g.
- Si f et g sont des fonctions polynomiales, alors $g \circ f$ est une fonction polynomiale, dont le degré (si ni f ni g n'est la fonction nulle) est le produit des degrés de f et g.

b) Zéros et signe d'une fonction polynomiale de degré 2. On appelle zéro d'une fonction g tout réel α tel que $g(\alpha) = 0$. On considère une fonction polynomiale f de degré 2 : $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. On rappelle que :

- Si $\Delta > 0$, alors f a deux zéros α_1 et α_2,

$$\alpha_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} .$$

  On a de plus la factorisation $f(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$, qui se traduit par les formules

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad \alpha_1 \alpha_2 = \frac{c}{a} .$$

  Notons I l'intervalle ouvert d'extrémités α_1 et α_2.

  Si x est dans I, $f(x)$ est de signe opposé à celui de a. Si x n'est pas dans I et est distinct de α_1 et α_2, $f(x)$ est de même signe que a.

- Si $\Delta = 0$, f a un unique zéro $\alpha = -b/2a$. On a la factorisation $f(x) = a(x - \alpha)^2$, et pour x distinct de α, $f(x)$ est du même signe que a.

- Si $\Delta < 0$, f n'a aucun zéro dans $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est du même signe que a.

Exemple. Résolvons l'inéquation

$$(*) \qquad x^2 + x - 1 > 0$$

Le discriminant est ici

$$\Delta = 1^2 - 4(-1) = 5\,.$$

La fonction polynomiale $f : x \mapsto x^2 + x - 1$ a donc deux racines,

$$\alpha_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Si $x \in]\alpha_1, \alpha_2[$, $f(x) < 0$; si $x = \alpha_1$ ou $x = \alpha_2$, $f(x) = 0$; si $x \in \mathbb{R} \setminus [\alpha_1, \alpha_2]$, $f(x) > 0$.

L'ensemble des solutions de $(*)$ est donc
$S = \mathbb{R} \setminus [\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}] =]-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}[\cup]\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[\,.$

c) Factorisation d'une fonction polynomiale.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré n. Si $f(\alpha) = 0$, alors f admet une factorisation par $x \mapsto x - \alpha$:

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = (x-\alpha)g(x)\,,\ \text{avec } g \text{ fonction polynomiale de degré } n-1$$

Exemples. i) $f(x) = x^3 - 1$. On a $f(1) = 0$. On a une factorisation de la forme

$$f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)\,.$$

Pour déterminer a, b, c, on développe $(x-1)(ax^2 + bx + c)$ et on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ x^3 - 1 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c\,.$$

Par identification des coefficients, il vient $a = 1$, $b - a = 0$, $c - b = 0$, $c = 1$, ce qui donne $a = b = c = 1$: $f(x) = (x-1)(x^2 + x + 1)$.

ii) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + x - 2$. On remarque que $f(-1) = 0$. On a donc une factorisation par $(x \mapsto x + 1)$. On trouve

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = (x+1)g(x)\,,\ \text{avec}\ \ g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 2\,.$$

On remarque que $g(2) = 0$ et on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ g(x) = (x-2)h(x)\,,\ \text{avec}\ \ h(x) = 2x^2 - x + 1\,.$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = (x+1)(x-2)(2x^2 - x + 1)\,.$$

Le discriminant Δ de h est strictement négatif, et $h(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Résultat général. Toute fonction polynomiale f non nulle admet une factorisation de la forme

$$f(x) = C(x - \alpha_1)\ldots(x - \alpha_p)g_1(x)\ldots g_q(x)\,,$$

où $C \in \mathbb{R}^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont des réels (pas nécessairement distincts) et $g_1, \ldots, g_q$ sont des fonctions polynomiales de degré 2, de discriminant strictement négatif.

4.2 Fonctions rationnelles

On appelle fonction rationnelle toute fonction F de la forme $\left(x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}\right)$, où P et Q sont deux fonctions polynomiales. L'ensemble de définition de F est

$$D_F = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}.$$

Exemples.

- La fonction $\left(x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{2x-3}\right)$ est une fonction rationnelle, d'ensemble de définition $\mathbb{R}\backslash\{3/2\}$.
- La fonction $\left(x \mapsto \dfrac{x+4}{x^2+x+1}\right)$ est une fonction rationnelle, d'ensemble de définition $\mathbb{R}$: pourquoi?.
- La fonction $\left(x \mapsto \dfrac{x^5-x^4+\sqrt{2}}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{5})}\right)$ est une fonction rationnelle, d'ensemble de définition $\mathbb{R}\backslash\{1, -2, -\sqrt{5}\}$.

Exercice. Justifier que la somme de deux fonctions rationnelles est une fonction rationnelle.

Simplification d'une fonction rationnelle

On peut obtenir une expression simplifiée d'une fonction rationnelle $F = \left(x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}\right)$ lorsque les fonctions polynomiales P et Q ont des facteurs communs.

Exemple. On considère la fonction rationnelle $F = \left(x \mapsto \frac{x^3-1}{x^2-1}\right)$, d'ensemble de définition $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$: $F = \dfrac{P}{Q}$, avec

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ P(x) = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)\ ;$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ Q(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)\,.$$

La fonction $x \mapsto (x-1)$ est un facteur commun des fonctions polynomiales P est Q, et on a la simplification suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}\,,\ F(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1}\,.$$

5 Fonctions circulaires

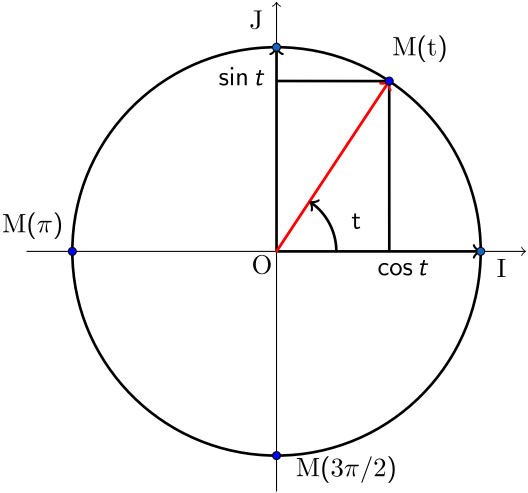
5.1 Fonctions cosinus et sinus

a) Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j})$, on note C le cercle de centre O et de rayon 1 (appelé cercle unité) : c'est l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient $x^2 + y^2 = 1$, et sa longueur est 2π. On note I (resp. J) le point du cercle C de coordonnées $(1, 0)$ (resp. $(0, 1)$).

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $M(t)$ le point de C tel que l'angle $(\widehat{\vec{i}, \vec{OM}}) = (\widehat{\vec{OI}, \vec{OM}})$ soit de mesure t en radians.

On a $M(0) = M(2\pi) = I$; $M(\pi/2) = M(-3\pi/2) = J$; pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M(t + 2\pi) = M(t)$.

On définit $\cos(t)$ (noté aussi $\cos t$) comme l'abscisse du point $M(t)$ et $\sin(t)$ (noté aussi $\sin t$) comme l'ordonnée de $M(t)$. On obtient ainsi deux fonctions $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont appelées les fonctions cosinus et sinus.



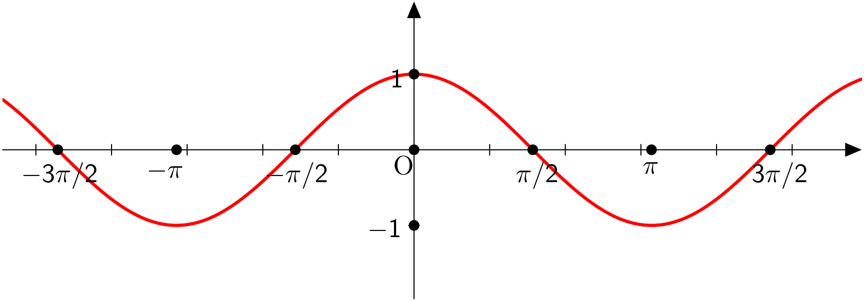
Si t est positif, on aboutit à $M(t)$ lorsqu'à partir du point I, on parcourt le cercle dans le sens direct (inverse de celui des aiguilles d'une montre) sur une longueur t; si t est négatif, on arrive à $M(t)$ lorsqu'à partir du point I, on parcourt le cercle dans le sens rétrograde (celui des aiguilles d'une montre) sur une longueur $|t| = -t$.

b) Premières propriétés.

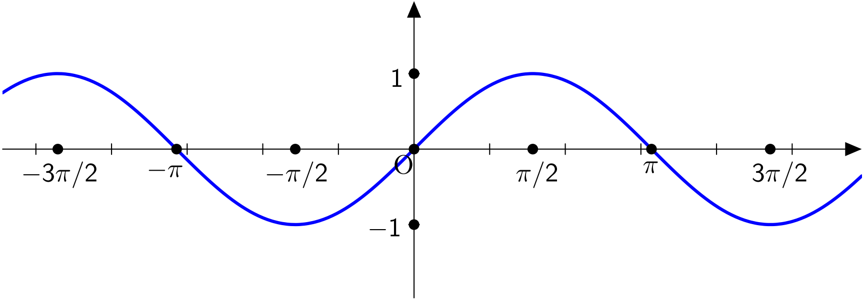
- Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques :
  $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(t+2\pi) = \cos t \quad \text{et} \quad \sin(t+2\pi) = \sin t\,;$
  $\forall k \in \mathbb{Z},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(t+2k\pi) = \cos t \quad \text{et} \quad \sin(t+2k\pi) = \sin t\,.$
- Les fonctions cos et sin sont à valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$:
  $\forall t \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \cos t \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin t \leq 1\,.$
- $\forall t \in \mathbb{R}, \quad (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1\,.$
- La fonction cosinus est paire, la fonction sinus est impaire :
  $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(-t) = \cos t \quad \text{et} \quad \sin(-t) = -\sin t$
- Lorsqu'on ajoute π à t, le cosinus et le sinus sont multipliés par -1 :
  $\forall t \in \mathbb{R} \quad \cos(t+\pi) = -\cos t \quad \text{et} \quad \sin(t+\pi) = -\sin t\,.$
- Lorsqu'on remplace t par $\dfrac{\pi}{2} - t$, le cosinus se transforme en sinus et inversement :
  $\forall t \in \mathbb{R} \quad \cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t \quad \text{et} \quad \sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t\,.$

Variation des fonctions cos et sin sur l'intervalle $[0, 2\pi]$

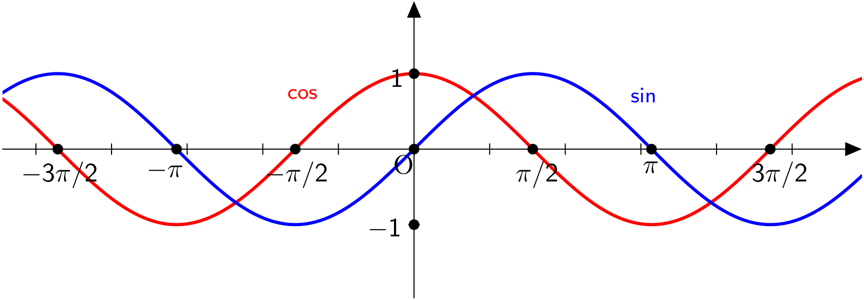
- Lorsque t croît de 0 à $\pi/2$, $\cos t$ décroît de 1 à 0 et $\sin t$ croît de 0 à 1.
- Lorsque t croît de $\pi/2$ à π, $\cos t$ décroît de 0 à -1 et $\sin t$ décroît de 1 à 0.
- Lorsque t croît de π à $3\pi/2$, $\cos t$ croît de -1 à 0 et $\sin t$ décroît de 0 à -1.
- Lorsque t croît de $3\pi/2$ à 2π, $\cos t$ croît de 0 à 1 et $\sin t$ croît de -1 à 0.



Courbe représentative de la fonction cosinus.



Courbe représentative de la fonction sinus.



Les deux courbes sur le même graphique.

Quelques valeurs remarquables.

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos t$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin t$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

Pout $t \in [\pi/2, \pi]$, on peut utiliser les formules

$$\cos(\pi - t) = -\cos(-t) = -\cos t \quad \text{et} \quad \sin(\pi - t) = -\sin(-t) = \sin t\,.$$

Par exemple, $\cos(5\pi/6) = -\cos(\pi/6) = -\sqrt{3}/2$ et $\sin(5\pi/6) = \sin(\pi/6) = 1/2$.
Pour $t \in [-\pi, 0]$, on utilise le fait que cos est paire et sin impaire.

Formules donnant le cosinus et le sinus d'une somme.

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \ sinb \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b\,.$$

En posant $b = a$ dans les formules précédentes, on obtient $\sin(2a) = 2\cos a \sin a$ et (en utilisant $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$)

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a\,.$$

Zéros des fonctions cos et sin.

La fonction cosinus prend la valeur 0 aux points de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

La fonction sinus prend la valeur 0 aux points de la forme $k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

5.2 La fonction tangente

La fonction tangente, notée tan, a pour ensemble de définition

$$D_{\tan} = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$$

et est définie par la formule

$$\forall t \in D_{\tan}\,,\ \tan t = \frac{\sin t}{\cos t}\,.$$

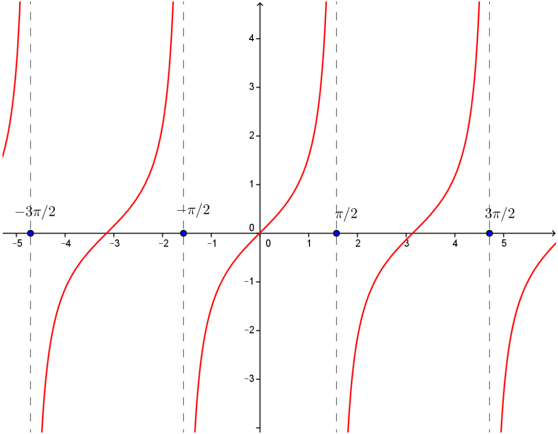
Propriétés.

- La fonction tangente est π-périodique : pour tout $x \in D_{\tan}$, $x+\pi \in D_{\tan}$, $x-\pi \in D_{\tan}$ et $\forall x \in D_{\tan}\,,\ \tan(x+\pi) = \tan(x)$.
  Il suffit donc d'étudier le sens de variation de tan sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$.
- La fonction tangente est impaire ; elle prend la valeur 0 en les points $k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
- La fonction tan est strictement croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$; $\tan x$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\pi/2$ à droite, et vers $+\infty$ lorsque x tend vers $\pi/2$ à gauche.
- Pour tout $x \in D_{\tan}$,

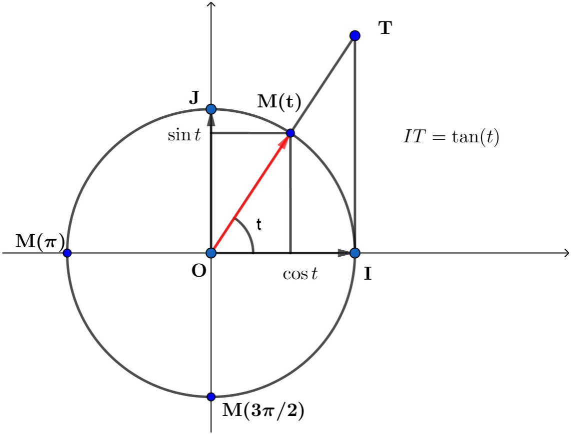
$$1 + (\tan x)^2 = 1 + \frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}\,.$$

- Tangente d'une somme. Pour tous $a, b \in D_{\tan}$ tels $a+b \in D_{\tan}$,

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \\ &= \frac{\cos a \cos b\,(\tan a + \tan b)}{\cos a \cos b\,(1 - \tan a \tan b)} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}\end{aligned}$$


$-3\pi/2$
$-\pi/2$
$\pi/2$
$3\pi/2$
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
4 3 2 1 0 -1 -2 -3

Interprétation géométrique



6 Limites

6.1 Notion de limite

On considère une fonction $f : D \to \mathbb{R}$; nous allons voir ce que signifie $\lim_{x \to a} f(x) = l$. Ici, a peut être un nombre réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$. De même pour l.

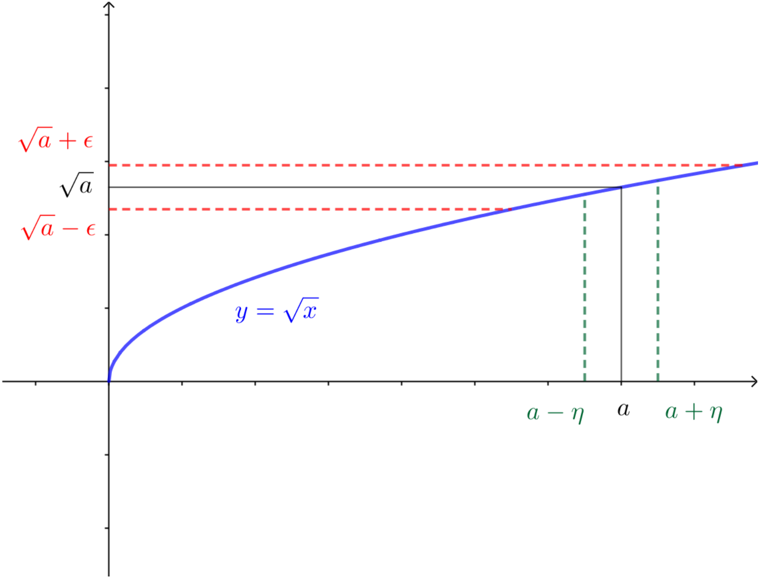
a) On suppose d'abord que a est un nombre réel, qui appartient à D, ou qui est une borne d'intervalle inclus dans D.

Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet l pour limite en a (notation : $\lim_{x \to a} f(x) = l$), ou que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a, si "$f(x)$ devient aussi proche qu'on veut de l dès que x est suffisamment proche de a". Plus précisément :

$\lim_{x \to a} f(x) = l$ si, pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]a - \eta, a + \eta[\cap D\,,\ |f(x) - l| < \epsilon\,.$$

Exemple. Soit $a \in [0, +\infty[$; $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.



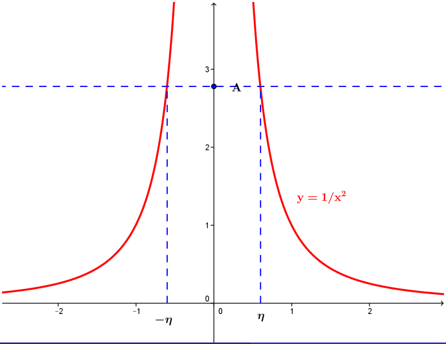
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a (notation : $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$) si "$f(x)$ devient aussi grand qu'on veut dès que x est suffisamment proche de a". Plus précisément :

$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ si, pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[\cap D\,, \;\; f(x) > A\,.$$

Exemple.

$\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty.$



On a de même la définition suivante de $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$:

On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a (notation : $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$) si "$f(x)$ devient aussi petit qu'on veut (dans le sens où $-f(x)$ devient aussi grand qu'on veut) dès que x est suffisamment proche de a". Plus précisément :

$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ si, pour tout $A \in \mathbb{R}_-$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]a - \eta, a + \eta[\cap D \,, \quad f(x) < A \,.$$

Exemple. $\lim_{x \to 0} -1/x^2 = -\infty$

Remarque. Une fonction f peut ne pas avoir de limite en a. Si cette limite existe, elle est unique.

b) Limite à droite, limite à gauche en un réel a.

Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet l pour limite à droite en a (notation : $\lim_{x \to a, x > a} f(x) = l$, ou $\lim_{x \to a_+} f(x) = l$), ou que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a à droite, si "$f(x)$ devient aussi proche qu'on veut de l dès que $x > a$ et x est suffisamment proche de a". Plus précisément :

$\lim_{x \to a, x > a} f(x) = l$ si, pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]a, a + \eta[\cap D\,,\ |f(x) - l| < \epsilon\,.$$

Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet l pour limite à gauche en a (notation : $\lim_{x \to a, x < a} f(x) = l$, ou $\lim_{x \to a_-} f(x) = l$), ou que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a à gauche, si "$f(x)$ devient aussi proche qu'on veut de l dès que $x < a$ et x est suffisamment proche de a". Plus précisément :

$\lim_{x \to a, x < a} f(x) = l$ si, pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]a - \eta, a[\cap D\,,\ |f(x) - l| < \epsilon\,.$$

On définit de manière analogue : $\lim_{x\to a, x>a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a, x<a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a, x>a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a, x<a} f(x) = -\infty$.

Exemple. On a $\lim_{x\to 0, x>0} 1/x = +\infty$, $\lim_{x\to 0, x<0} 1/x = -\infty$.

Remarque. $\lim_{x\to a} f(x) = l$ est équivalent à : $\lim_{x\to a, x>a} f(x) = l$ et $\lim_{x\to a, x<a} f(x) = l$ et (si $a \in D$) $f(a) = l$.

c) Limite en $+\infty$ ou en $-\infty$.

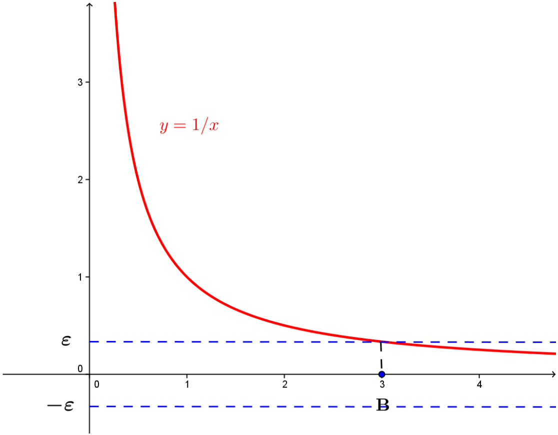
Si D (ensemble de définition de f) contient un intervalle de la forme $]c, +\infty[$ (resp. $]-\infty, c[$), alors on peut s'intéresser au comportement de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)

Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet l pour limite en $+\infty$ (notation : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$), ou que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$, si "$f(x)$ devient aussi proche qu'on veut de l dès que x est suffisamment grand". Plus précisément :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ si, pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe $B \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in]B, +\infty[\cap D\,,\ |f(x) - l| < \epsilon\,.$$

Exemple. $\lim_{x \to +\infty} 1/x = 0$.



On définit de manière analogue $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$, ainsi que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Par exemple :

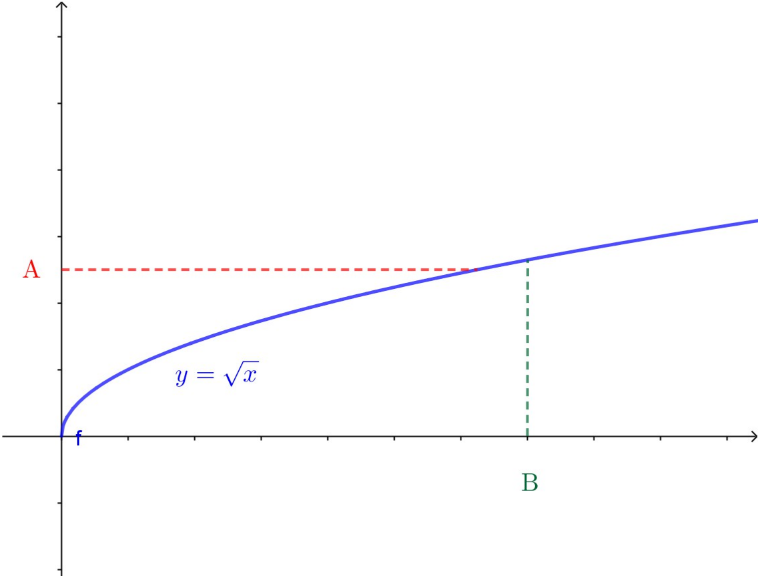
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ (notation : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$) si : pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, il existe $B \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in]B, +\infty[\cap D\,,\ f(x) > A$

On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ (notation : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$) si : pour tout $A \in \mathbb{R}_-$, il existe $B \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in]B, +\infty[\cap D\,,\ f(x) < A$

Exemples. $\lim_{x\to-\infty} 1/x = 0$; $\lim_{x\to+\infty} x^2 = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} |x| = \lim_{x\to-\infty} |x| = +\infty$.

Remarque. Les fonctions cosinus et sinus n'ont pas de limite en $+\infty$, ni en $-\infty$.

Illustration de : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$.



6.2 Règles de calcul

Dans la pratique, on utilise rarement la définition de limite pour prouver qu'une fonction a une limite en un point donné. On connaît les limites de fonctions usuelles et pour les autres fonctions il suffit souvent d'appliquer des règles de calcul.

Dans cette partie, a peut désigner un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

a) Limite d'une somme de fonctions. On suppose que les fonctions f_1 et f_2 ont une limite (réelle ou infinie) en a. Le tableau suivant donne, dans certains cas, la limite de la fonction somme $f_1 + f_2$.

$\lim_{x\to a} f_1(x)$	$\lim_{x\to a} f_2(x)$	$\lim_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x))$
$l_1 \in \mathbb{R}$	$l_2 \in \mathbb{R}$	$l_1 + l_2$
$l_1 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$l_1 \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

FI signifie : "forme indéterminée" : on ne peut pas donner de résultat général sur la limite éventuelle de la somme.

b) Limite d'un produit de fonctions.

$\lim_{x\to a} f_1(x)$	$\lim_{x\to a} f_2(x)$	$\lim_{x\to a}(f_1(x)f_2(x))$
$l_1 \in \mathbb{R}$	$l_2 \in \mathbb{R}$	$l_1 l_2$
$l_1 \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$	$+\infty$
$l_1 \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	$-\infty$
$l_1 \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$-\infty$
$l_1 \in \mathbb{R}_-^*$	$-\infty$	$+\infty$
0	$\pm\infty$	FI
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

c) Limite du produit d'une fonction par une constante. Soit $c \in \mathbb{R}^*$.

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} c\, f(x)$
$l \in \mathbb{R}$	$c\, l$
$+\infty$	$+\infty$ si $c > 0$ $-\infty$ si $c < 0$
$-\infty$	$-\infty$ si $c > 0$ $+\infty$ si $c < 0$

d) Limite de $1/f$. On utilise ici la notation suivante : $\lim_{x\to a} f(x) = 0_+$ (resp. 0_-) lorsque $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$) pour tout x suffisamment proche de a (si $a \in \mathbb{R}$) ou suffisamment grand (si $a = +\infty$) ou suffisamment petit (si $a = -\infty$)

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)}$
$l \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{l}$
0_+	$+\infty$
0_-	$-\infty$
$\pm\infty$	0

Remarques.

- Les règles précédentes restent valides lorsqu'on considère la limite à droite ou à gauche en un réel a.
- On peut déduire des règles précédentes celles concernant un quotient f_1/f_2 de fonctions, en écrivant que f_1/f_2 est le produit de f_1 et de $1/f_2$. Par exemple, si $\lim_{x\to a} f_1(x) = l$ (avec $l \in \mathbb{R}$) et $\lim_{x\to a} f_2(x) = -\infty$, alors $\lim_{x\to a} f_1(x)/f_2(x) = 0$ (car $\lim_{x\to a} 1/f_2(x) = 0$).

e) Limite d'une composée de fonctions. Tout comme a, b désigne ici un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$. De même pour l. La règle est la suivante.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{y\to b} g(y) = l$, alors $\lim_{x\to a} g\circ f(x) = l$:

Si $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a et $g(y)$ tend vers l lorsque y tend vers b, alors $g(f(x))$ tend vers l lorsque x tend vers a.

Exemple. On pose $f(x) = \sqrt{(x+2)(\frac{1}{x}+3)}$.

Que se passe-t-il lorsque x tend vers $+\infty$? $x+2$ tend alors vers $+\infty$ et, comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\frac{1}{x}+3$ tend vers 3. Donc le produit $(x+2)(\frac{1}{x}+3)$ tend vers $+\infty$. Or, lorsque y tend vers $+\infty$, $\sqrt{y}$ tend vers $+\infty$. On a donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

6.3 Comparaison de fonctions et limites

a) f, g et h désignent des fonctions définies sur D et a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. On a le résultat suivant.

Théorème des gendarmes. On suppose que

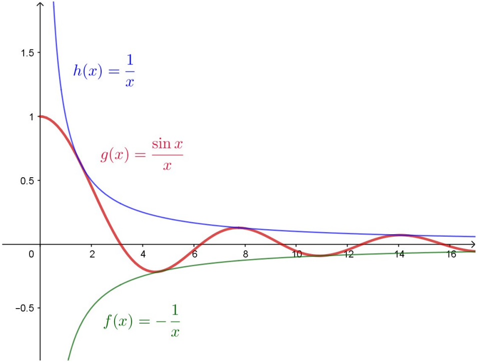
$$(1) \qquad \forall x \in D\,,\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)\,.$$

Si f et h admettent en a une même limite réelle l, alors on a également $\lim_{x\to a} g(x) = l$.

Si $a \in \mathbb{R}$: pour que la conclusion soit valide, il suffit que l'inégalité (1) soit vérifiée quel que soit $x \in D\cap]a-\eta, a+\eta[$, pour un certain réel $\eta > 0$ (on dit que (1) est vérifiée au voisinage de a).
Si $a = +\infty$ (resp. $-\infty$) : il suffit que l'inégalité (1) soit vérifiée quel que soit $x \in D\cap]A, +\infty[$ (resp. $D\cap]-\infty, A[$), pour un certain $A \in \mathbb{R}$ (on dit que (1) est vérifiée au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$)).

Exemple. On considère la fonction $(x \mapsto \dfrac{\sin x}{x})$, définie sur $\mathbb{R}^*$. On sait que pour tout réel x, $-1 \le \sin x \le 1$. Donc $\forall x \in]0, +\infty[\,,\ -\dfrac{1}{x} \le \dfrac{\sin x}{x} \le \dfrac{1}{x}$.

Or $\lim_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.



b) On considère deux fonctions f et g définies sur D.

Théorème. On suppose que

$$\forall x \in D\,,\ f(x) \leq g(x)\,. \tag{2}$$

i) Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$;
ii) Si $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Comme pour le théorème précédent, il suffit que l'inégalité (2) soit vérifiée au voisinage de a.

Exemple. Etudions le comportement en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto (2+\cos x)x^3$.
On a $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \cos x \geq -1$, donc $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ 2+\cos x \geq 1$. On en déduit :

$$\forall x \in [0,+\infty[\,,\ f(x) \geq x^3\,.$$

Or $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc, d'après le théorème précédent, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

6.4 Exemples de calculs de limites

a) Limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fonction polynomiale. On considère une fonction polynomiale P de degré $n \geq 1$:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \ , \quad \text{avec } a_n \neq 0 \, .$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \, , \ P(x) = x^n R(x) \ , \quad \text{avec } R(x) = a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \, .$$

On a $\lim_{x\to\pm\infty} R(x) = a_n$ et

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

On en déduit :

- cas où n est pair. $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = +\infty$ si $a_n > 0$; $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = -\infty$ si $a_n < 0$.
- cas où n est impair. $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ si $a_n > 0$; $\lim_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$ si $a_n < 0$.

b) Limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fonction rationnelle. On considère une fonction rationnelle ($x \mapsto F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$) P et Q étant des fonctions polynomiales de degrés respectifs n et m, de termes de plus haut degrés $a_n x^n$ et $b_m x^m$. En mettant, comme en a), x^n et x^m en facteur dans $P(x)$ et $Q(x)$ on trouve

$$F(x) = \frac{x^n}{x^m} R(x) \ , \quad \text{avec} \ \lim_{x \to \pm\infty} R(x) = \frac{a_n}{b_m}$$

Si $n = m$ on a ainsi $\lim_{x \to \pm\infty} F(x) = a_n / b_m$. Si $m > n$, on obtient $\lim_{x \to \pm\infty} F(x) = 0$. Enfin, si $n > m$, les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de F sont $+\infty$ ou $-\infty$ (selon le signe de a_n / b_m et, pour la limite en $-\infty$, la parité de $n - m$).

Exemple. On pose $F(x) = \dfrac{-x^6 + 2x^3 + 4}{2x^3 - x^2 - x + 1}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \, , \ F(x) = \frac{x^6(-1 + \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^6})}{x^3(2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})} = x^3 \frac{-1 + \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^6}}{2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \, .$$

Lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), x^3 tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et $\frac{-1+\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x^6}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}$ tend vers $-1/2$. On obtient : $\lim_{x \to +\infty} F(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} F(x) = +\infty$.

A retenir de ce qui précède.

- La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fonction polynomiale P est égale à la limite de son terme de plus haut degré :

$$\lim_{x\to+\infty(-\infty)} P(x) = \lim_{x\to+\infty(-\infty)} a_n x^n$$

pour $P(x) = a_n x^n +$ termes de degré $< n$, $a_n \neq 0$.

- La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ du quotient de deux fonctions polynomiales P et Q est égale à la limite du quotient de leurs termes de plus haut degré :

$$\lim_{x\to+\infty(-\infty)} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty(-\infty)} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

pour $P(x) = a_n x^n +$ termes de degré $< n$, $a_n \neq 0$ et $Q(x) = b_m x^m +$ termes de degré $< m$, $b_m \neq 0$.

c) Limite en un réel a d'une fonction rationnelle $x \mapsto F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ lorsque $Q(a) = 0$.

Lorsque $Q(a) = 0$, on factorise Q par une puissance de $(x-a)$ pour obtenir $Q(x) = (x-a)^p S(x)$, avec $S(a) \neq 0$. On fait de même avec P dans le cas où $P(a) = 0$. Après simplification éventuelle, on obtient

$$F(x) = (x-a)^m \frac{R(x)}{S(x)}\,, \text{ avec } m \in \mathbb{Z}\,,\ R(a) \neq 0\,,\ S(a) \neq 0\,.$$

L'expression ci-dessus permet de déterminer le comportement de $F(x)$ lorsque x tend vers a. Par exemple, si $m > 0$, F a pour limite 0 en a .

Exemple. Etudions le comportement de $F(x) = \dfrac{x^4 + 2x^3 + x^2}{x^3 + x^2 - x - 1}$ lorsque x tend vers -1. Ici le dénominateur s'annule pour $x = -1$. On a

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)x^2 - (x+1) = (x+1)(x^2-1) = (x+1)^2(x-1)\,.$$

D'autre part $\quad x^4 + 2x^3 + x^2 = (x^2 + 2x + 1)x^2 = (x+1)^2 x^2\,.$

Donc après simplification $F(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$, ce qui permet de trouver que F admet pour limite $-1/2$ en -1.

d) Limite d'une somme ou d'une différence où intervient une racine carrée. On veut étudier la limite éventuelle en $+\infty$ de f et g, avec

$$f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x^2+3x} - x$$

On a $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+3} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$, ce qui donne la forme indéterminée " $+\infty + (-\infty)$" pour la limite de f en $+\infty$. Cependant on va transformer la formule qui définit $f(x)$ de manière à pouvoir calculer cette limite. Pour cela, on multiplie et divise $f(x)$ par sa quantité conjuguée $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1}$ et on exploite l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1})} = \frac{(x+3)-(x+1)}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1})} \\ &= \frac{2}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1})} \end{aligned}$$

On a $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1}) = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Pour la limite de g en $+\infty$, on a aussi une forme indéterminée, et on utilise la même astuce.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \frac{(x^2+3x)-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} \\ &= \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x} \end{aligned}$$

On met ensuite x en facteur dans $\sqrt{x^2+3x}+x$: pour $x>0$,

$$\sqrt{x^2+3x} = \sqrt{x^2(1+\frac{3}{x})} = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x}} = x\sqrt{1+\frac{3}{x}}$$

On obtient, pour $x>0$,

$$g(x) = \frac{3x}{x(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1)} = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}.$$

Cette expression de $g(x)$ pour $x>0$ permet de trouver $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 3/2$.

7.1 Continuité en un point

On considère une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ et un point $a \in D$; la fonction f est dite continue en a (ou continue au point a) si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

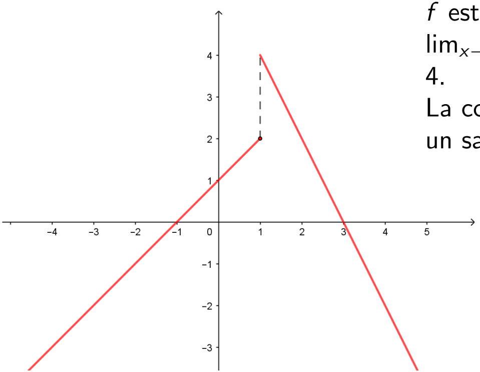
Ainsi f est continu en a si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[\cap D\,,\ |f(x) - f(a)| < \epsilon\,.$$

Remarques.

- Si deux fonctions f et g ont les mêmes restrictions à un intervalle ouvert contenant a, alors l'une est continue en a si et seulement si l'autre l'est.
- On peut aussi dire que f est continue en a si $\lim_{x\to a, x<a} f(x) = f(a)$ et $\lim_{x\to a, x>a} f(x) = f(a)$. Cette caractérisation est utile lorsqu'on a une fonction "définie par morceaux".
- Les exemples les plus usuels de fonctions non continues en a sont ceux de fonctions "présentant un saut" en a (ce qui se voit bien sur la courbe représentative).

Exemple. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ si } x \leq 1 \\ 6-2x \text{ si } x > 1 \end{cases}$



f est discontinue en 1 : $f(1) = 2$ et $\lim_{x \to 1, x>1} f(x) = \lim_{x \to 1, x>1} 6 - 2x = 4$.

La courbe représentative de f présente un saut.

Propriétés.

- La somme de deux fonctions continues en a est continue en a. Plus généralement, toute combinaison linéaire de fonctions continues en a est continue en a.
- La produit de deux fonctions continues en a est continu en a. Le quotient f/g de deux fonctions f et g continues en a est continu en a si $g(a) \neq 0$.
- On suppose que f est continue en a et que g est continue en $b = f(a)$. Alors $g \circ f$ est continue en a.

7.2 Fonctions continues

Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite continue si elle est continue en tout point $a \in D$

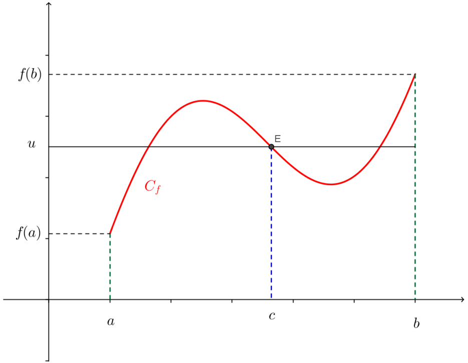
Remarque. Toutes les fonctions usuelles que nous avons vues (fonctions polynomiales, rationnelles, inverse, racine carrée , valeur absolue, cosinus, sinus, tangente) et celles que nous verrons plus tard (arc cosinus, arc sinus, arc tangente, logarithme népérien, exponentielle...) sont continues.

Propriétés.

- La somme de deux fonctions continues est une fonction continue. Plus généralement, toute combinaison linéaire de fonctions continues est continue.
- Le produit de deux fonctions continues est une fonction continue. Si f et g sont deux fonctions continues de domaine de définition D, la fonction quotient f/g est continue en tout point de son domaine de définition $D' = \{x \in D \,|\, g(x) \neq 0\}$.
- Si $f : D \to \mathbb{R}$ est continue et $g : D' \to \mathbb{R}$ est continue, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue en tout point de son domaine de définition $D'' = \{x \in D \,|\, f(x) \in D'\}$.

7.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout réel u compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = u$.



Exercice. On considère deux fonctions continues $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que $f(a) < g(a)$ et $f(b) > g(b)$. Montrer (en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires) qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = g(c)$.

8 Fonctions réciproques

8.1 Bijection

On considère une fonction $f : D \to \mathbb{R}$, et un ensemble $D' \subset \mathbb{R}$. On dit que f est une bijection de D sur D' si :

i) f prend ses valeurs dans D' (c'est-à-dire $f(x) \in D'$ pour tout $x \in D$);

ii) Pour tout $y \in D'$, l'équation $f(x) = y$, d'inconnue x, a une unique solution dans D (c'est-à-dire que y a un unique antécédent par f).

Si f est une bijection de D sur D', on peut définir une fonction $g : D' \to D$ de cette manière : pour $y \in D'$, $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f (c'est-à-dire l'unique solution de l'équation $f(x) = y$); g est alors une bijection de D' sur D, et est appelée la bijection réciproque de f. On a :

$$\forall y \in D' \,,\ f(g(y)) = y \quad \text{et} \quad \forall x \in D \,,\ g(f(x)) = x \,.$$

On note $g = f^{-1}$. On a aussi $g^{-1} = f$ (f est la bijection réciproque de g).

Exemple. La fonction affine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x + 1$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$: pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $3x + 1 = y$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$, c'est $\dfrac{y}{3} - \dfrac{1}{3}$. La bijection réciproque est $f^{-1} : x \mapsto \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{3}$.

8.2 Proposition

(a) Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone. Alors f est une bijection de D sur $D' = \{f(x)\,;\ x \in D\}$, l'ensemble des valeurs prises par f.

(b) Soit $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I = (a, b)$ (qui peut être $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$). On suppose que f est continue et strictement croissante (resp. décroissante). Alors f est une bijection de (a, b) sur $J = f(I) = (\lim_a f, \lim_b f)$ (resp. $(\lim_b f, \lim_a f)$).
De plus la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement croissante (resp. strictement décroissante).

Remarques. Si I est fermé en a, alors $\lim_a f = f(a)$ et l'intervalle image J est fermé en $f(a)$. Si I est ouvert en a, l'intervalle J est ouvert en $\lim_a f$ (l'existence de cette limite, qui peut être infinie, est une conséquence de la monotonie de f).

De même si I est fermé en b, alors $\lim_b f = f(b)$ et l'intervalle image J est fermé en $f(b)$. Si I est ouvert en b, l'intervalle J est ouvert en $\lim_b f$.

Posons par exemple $I = [a, b[$ et considérons $f : [a, b[\to \mathbb{R}$, continue et strictement monotone.

Si f est strictement croissante, alors $J = [c, d[$, avec $c = f(a)$ et $d = \lim_{x \to b} f(x)$.

x	a		b
			d
$f(x)$		$\nearrow$	
	c		

Tableau de variation de f.

x	c		d
			b
$f^{-1}(x)$		$\nearrow$	
	a		

Tableau de variation de f^{-1}.

Si f est strictement décroissante, alors $J =]d, c]$, toujours avec $c = f(a)$ et $d = \lim_{x \to b} f(x)$.

x	a		b
	c		
$f(x)$		$\searrow$	
			d

Tableau de variation de f.

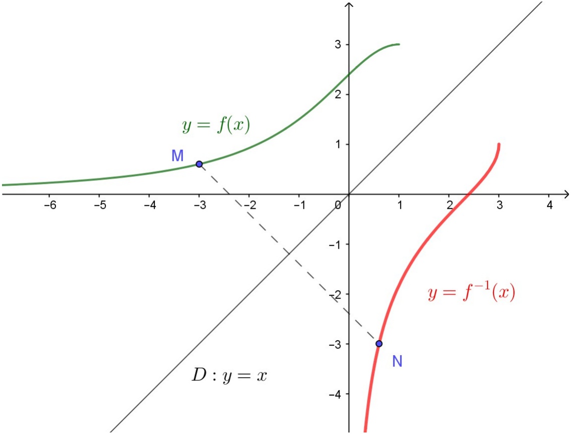
x	d		c
	b		
$f^{-1}(x)$		$\searrow$	
			a

Tableau de variation de f^{-1}.

Remarques sur la preuve de la proposition de 8.2 .

- Pour (a) : par définition de D', f prend ses valeurs dans D', et pour $y \in D'$, l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue x) a au moins une solution dans D. Cette solution est unique, car la monotonie stricte de la fonction f implique que si $x \neq x'$, $f(x) \neq f(x')$.
- Pour (b) : pour $y \in J$, l'existence d'au moins une solution dans l'intervalle I pour l'équation $f(x) = y$ est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires. Comme pour (a), l'unicité de cette solution provient de la monotonie stricte de la fonction f.

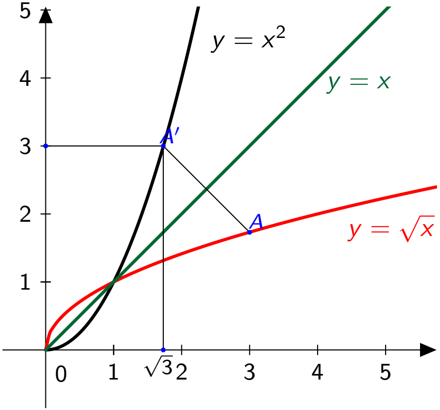
Relation entre les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans un repère orthonormé.



La courbe représentative de la bijection réciproque f^{-1} est obtenue à partir de celle de f par symétrie orthogonale par rapport à la droite D d'équation $y = x$. Cette symétrie envoie le point M de coordonnées (x, y) sur le point N de coordonnés (y, x).

8.3 Exemple 1

On considère la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$; f est continue et strictement croissante,avec $f(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. f est donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. La bijection réciproque f^{-1} est la fonction racine carrée.



Plus généralement, supposons que n est un entier pair strictement positif. La fonction $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$ a les mêmes propriétés (continuité, croissance stricte, limites) que la restriction à $[0,+\infty[$ de la fonction carré. C'est aussi une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$. La bijection réciproque f_n^{-1} est appelée fonction racine n-ième. Pour $x \in [0,+\infty[$, $f_n^{-1}(x)$ est noté $\sqrt[n]{x}$, ou $x^{1/n}$. On a, pour n pair et $x \in [0,+\infty[$,

$$\sqrt[n]{x} = t \iff t \in [0,+\infty[\quad \text{et} \quad t^n = x\,.$$

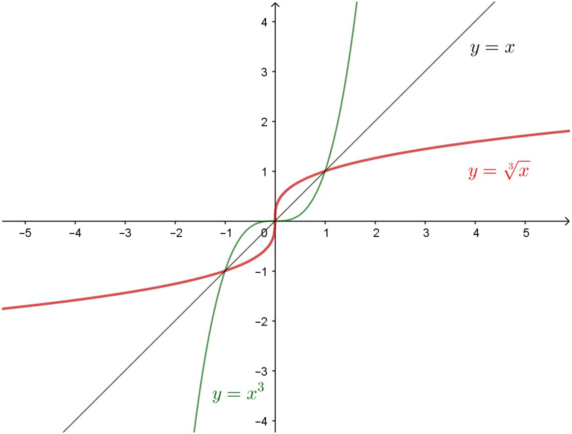
Par exemple, comme $2^6 = 64$, $\sqrt[6]{64} = 64^{1/6} = 2$; comme $3^4 = 81$, $\sqrt[4]{81} = 81^{1/4} = 3$; $\sqrt[4]{-81}$ n'est pas défini.

Propriétés. On rappelle que n est ici supposé pair; l'intervalle $[0,+\infty[$ est noté $\mathbb{R}_+$.

- Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $(\sqrt[n]{x})^n = x$.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, $x^n \in \mathbb{R}_+$ et $\sqrt[n]{x^n} = |x|$.
- Pour $x, y \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$; si de plus $y > 0$, $\sqrt[n]{x/y} = \sqrt[n]{x}/\sqrt[n]{y}$.

8.4 Exemple 2

On considère la fonction cube $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^3$; g est continue et strictement croissante,avec $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$; g est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. La bijection réciproque g^{-1}, définie sur $\mathbb{R}$, est appelée la fonction racine cubique; $g^{-1}(x)$ est noté $\sqrt[3]{x}$, ou $x^{1/3}$.



Plus généralement, supposons que n est un entier impair positif. La fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = x^n$ a les mêmes propriétés (continuité, croissance stricte, limites) que la la fonction cube. C'est ainsi une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. La bijection réciproque g_n^{-1} est appelée fonction racine n-ième. Pour $x \in \mathbb{R}$, $g_n^{-1}(x)$ est noté $\sqrt[n]{x}$, ou $x^{1/n}$. On a, pour n impair et $x \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt[n]{x} = t \iff t^n = x\,.$$

Par exemple, $3^3 = 27$ donc $\sqrt[3]{27} = 3$; $(-4)^5 = -1024$ donc $\sqrt[5]{-1024} = -4$.

Propriétés. On rappelle que n est ici supposé impair.

- $\sqrt[n]{x}$ est du même signe que x.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\sqrt[n]{x})^n = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt[n]{x^n} = x$.
- Pour $x, y \in \mathbb{R}$, $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$; si de plus $y \neq 0$, $\sqrt[n]{x/y} = \sqrt[n]{x}/\sqrt[n]{y}$.

9 Fonctions circulaires réciproques

9.1 Fonctions arc sinus et arc cosinus

Fonction arc sinus. Considérons la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. Cette fonction est continue, strictement croissante, vaut -1 en $-\pi/2$ et 1 en $\pi/2$. D'après la proposition de 8.2, c'est une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$.

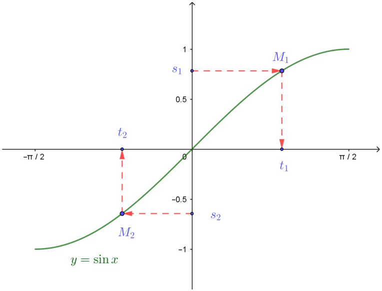
x	$-\pi/2$	$\pi/2$
$\sin x$	-1 $\nearrow$	1

Tableau de variations de $\sin_{|[-\pi/2,\pi/2]}$.

La bijection réciproque est appelée arc sinus, et est notée arcsin. La fonction arcsin est donc définie sur $[-1, 1]$, à valeurs dans $[-\pi/2, \pi/2]$.

Pour $s \in [-1, 1]$, on a $\arcsin s = t \iff \begin{cases} t \in [-\pi/2, \pi/2] \\ \sin t = s \end{cases}$.

Par exemple, $\sin(\pi/6) = 1/2$ et $\pi/6 \in [-\pi/2, \pi/2]$, donc $\arcsin(1/2) = \pi/6$.

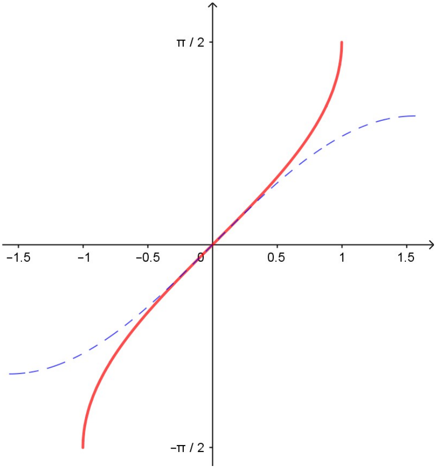


Sur ce dessin, la courbe verte représente la fonction $\sin_{|[-\pi/2,\pi/2]}$. On a $t_1 = \arcsin(s_1)$ et $t_2 = \arcsin(s_2)$.

Propriétés.

- $\forall x \in [-1, 1]\,,\ \sin(\arcsin x) = x$ et $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2]\,,\ \arcsin(\sin x) = x$.
- La fonction $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ est continue et strictement croissante, avec $\arcsin(-1) = -\pi/2$, $\arcsin(1) = \pi/2$.
- La fonction arcsin est impaire.

En rouge : la courbe représentative de arcsin. En bleu : celle de $\sin_{|[-\pi/2,\pi/2]}$.



Fonction arc cosinus.

Considérons la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[0,\pi]$. Cette fonction est continue, strictement décroissante, vaut 1 en 0 et -1 en π. D'après la proposition de 8.2, c'est une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.

x	0	π
$\cos x$	1 $\searrow$	-1

Tableau de variations de $\cos_{|[0,\pi]}$.

La bijection réciproque est appelée arc cosinus, et est notée arccos. La fonction arccos est donc définie sur $[-1,1]$, à valeurs dans $[0,\pi]$.

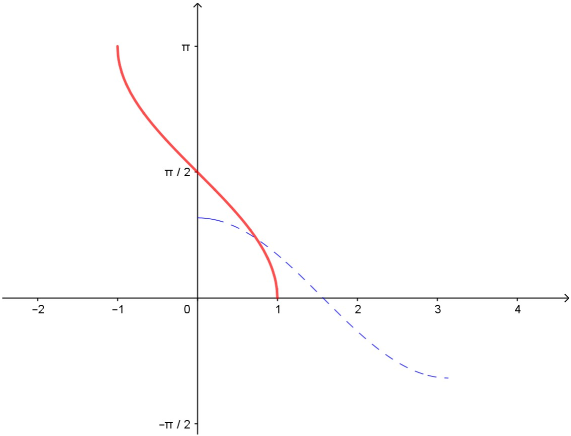
Pour $s \in [-1,1]$, on a $\arccos s = t \iff \begin{cases} t \in [0,\pi] \\ \cos t = s \end{cases}$.

Exemple : $\cos(2\pi/3) = -1/2$ et $2\pi/3 \in [0,\pi]$ donc $\arccos(-1/2) = 2\pi/3$.

Propriétés.

- $\forall x \in [-1,1]\,,\ \cos(\arccos x) = x$ et $\forall x \in [0,\pi]\,,\ \arccos(\cos x) = x$.
- La fonction $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ est continue et strictement décroissante, avec $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos(1) = 0$.

En rouge, la courbe représentative de arccos. En bleu, la courbe représentative de $\cos_{|[0,\pi]}$.



Quelques valeurs particulières de arcsin et arccos.

s	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\arcsin s$	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\arccos s$	π	$5\pi/6$	$3\pi/4$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0

Exercice. En utilisant la formule $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$, montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \ \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi .$$

En utilisant la formule $\sin(\pi/2 - \theta) = \cos\theta$, montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \ \arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2 .$$

9.2 Fonction arc tangente

Considérons la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$. Cette fonction est continue, strictement croissante, $\tan x$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\pi/2$ à droite, et vers $+\infty$ lorsque x tend vers $\pi/2$ à gauche. D'après la proposition de 8.2, tan est une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $]-\infty, +\infty[=\mathbb{R}$.

x	$-\pi/2$	$\pi/2$
$\tan x = \sin x / \cos x$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Tableau de variations de $\tan_{|]-\pi/2,\pi/2[}$.

La bijection réciproque est appelée arc tangente, et est notée *arctan*. La fonction arctan est donc définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]-\pi/2, \pi/2[$.

Pour $s \in \mathbb{R}$, on a $\arctan s = t \iff \begin{cases} t \in]-\pi/2, \pi/2[\\ \tan t = s \end{cases}$.

Exemple. $\tan(\pi/4) = \sin(\pi/4)/\cos(\pi/4) = 1$, car $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$. De plus $\pi/4$ est dans l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$. Donc $\arctan(1) = \pi/4$.

Propriétés.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$ et $\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\arctan(\tan x) = x$.
- La fonction $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ est continue et strictement croissante, avec $\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\pi/2$, $\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \pi/2$.
- La fonction arctan est impaire.

En rouge, la courbe représentative de arctan. En bleu, celle de $\tan_{|]-\pi/2,\pi/2[}$.