TD4. Corrigé des exercices 1 à 7.

L1S1 Portails Math-Info & Math-Physique
Analyse 1

2020-21

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l' équation différentielle

$$a. \quad 4y' + 3y = 0$$

Rappel de cours. *Soit A une primitive de a sur un intervalle I. L'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle* $y' = a(t)y$ *est*

$$\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto \lambda e^{A(t)} \, ; \, \lambda \in \mathbb{R}\} .$$

a. $4y' + 3y = 0 \iff y' = -\frac{3}{4}y$. Ici $a(t) = -\frac{3}{4}$, la fonction $t \mapsto -\frac{3}{4}t$ est une primitive de a sur $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est :

$$\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto \lambda e^{-\frac{3}{4}t} \, ; \, \lambda \in \mathbb{R}\} .$$

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles

$$b. \quad (1+t^2)y' - 2ty = 0 \qquad c. \quad (1+t^2)y' - ty = 0$$

b. $(1+t^2)y' - 2ty = 0 \iff y' = \dfrac{2t}{1+t^2}y$. Ici

$$a(t) = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{u'(t)}{u(t)} \quad \text{avec } u(t) = t^2+1\,.$$

La fonction $t \mapsto \ln(u(t)) = \ln(t^2+1)$ est une primitive de a sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme $y(t) = \lambda e^{\ln(t^2+1)} = \lambda(t^2+1)$,

$$\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto \lambda(t^2+1)\,;\ \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$

c. $(1+t^2)y' - ty = 0 \iff y' = \dfrac{t}{1+t^2}y$. Ici

$$a(t) = \frac{t}{1+t^2} = A'(t) \quad \text{avec } A(t) = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) \quad (\text{voir b.})\,.$$

Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme
$y(t) = \lambda e^{A(t)} = \lambda e^{\frac{1}{2}\ln(t^2+1)} = \lambda\sqrt{t^2+1}$,

$$\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto \lambda\sqrt{t^2+1}\,;\ \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$

Exercice 2. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = \left(2 - \frac{1}{t}\right) y \\ y(2) = 1 \end{cases}$.

On se place dans l'intervalle $I =]0, +\infty[$. La fonction $A : t \mapsto 2t - \ln(t)$ est une primitive sur I de la fonction $a : t \mapsto 2 - \dfrac{1}{t}$, donc les solutions sur I de l'équation différentielle $y' = \left(2 - \dfrac{1}{t}\right) y$ sont de la forme

$$y(t) = \lambda e^{2t - \ln(t)} = \lambda \frac{e^{2t}}{e^{\ln(t)}} = \lambda \frac{e^{2t}}{t}$$

Alors

$$y(2) = 1 \iff \lambda \frac{e^4}{2} = 1 \iff \lambda = \frac{2}{e^4}$$

La solution (sur $]0, +\infty[$) du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = \left(2 - \frac{1}{t}\right) y \\ y(2) = 1 \end{cases}$ est la fonction $y : t \mapsto \dfrac{2e^{2t}}{e^4 t}$.

Exercice 3. a) Trouver une solution particulière (de la forme $t \mapsto c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)$, avec c_1, c_2 constantes réelles) de l'équation différentielle $y' - y = \cos(3t)$.

a) On considère l'équation différentielle

$$(E_1) \qquad y' - y = \cos(3t)$$

Posons $y(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)$, avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}\,,\ y'(t) - y(t) &= (-3c_1 \sin(3t) + 3c_2 \cos(3t)) - (c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)) \\ &= (-c_1 + 3c_2) \cos(3t) + (-3c_1 - c_2) \sin(3t)\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \text{ est une solution de } (E_1) &\iff \forall t \in \mathbb{R}\,,\ (-c_1 + 3c_2) \cos(3t) + (-3c_1 - c_2) \sin(3t) = \cos(3t) \\ &\iff \begin{cases} -c_1 + 3c_2 = 1 \\ 3c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = -1/10 \\ c_2 = 3/10 \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction $y_1 : t \mapsto -\dfrac{\cos(3t)}{10} + 3\dfrac{\sin(3t)}{10}$ est une solution particulière de (E_1).

b) Trouver une solution particulière (de la forme $t \mapsto ce^{4t}$ avec c constante réelle) de l'équation différentielle $y' - y = e^{4t}$.

b) On considère l'équation différentielle

$$(E_2) \qquad y' - y = e^{4t}.$$

Posons $y(t) = ce^{4t}$, avec $c \in \mathbb{R}$. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; y'(t) - y(t) = 4ce^{4t} - ce^{4t} = 3ce^{4t}$$

Donc

$$y \text{ est une solution de } (E_2) \iff 3c = 1 \iff c = \frac{1}{3}.$$

La fonction $y_2 : t \mapsto \dfrac{e^{4t}}{3}$ est une solution particulière de (E_2).

c) En déduire une solution particulière de l'équation différentielle (E') $y' - y = \cos(3t) + e^{4t}$.

c) On a vu en a) que la fonction $y_1 : t \mapsto -\dfrac{\cos(3t)}{10} + 3\dfrac{\sin(3t)}{10}$ est une solution de

(E_1).
$$y' - y = \cos(3t)$$

. On a vu en b) que la fonction $y_2 : t \mapsto \dfrac{e^{4t}}{3}$ est une solution de

(E_2).
$$y' - y = e^{4t}$$

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ (y_1 + y_2)'(t) - (y_1 + y_2)(t) &= (y_1'(t) - y_1(t)) + (y_2'(t) - y_2(t)) \\ &= \cos(3t) + e^{4t}.\end{aligned}$$

La fonction $y_1 + y_2 : t \mapsto -\dfrac{\cos(3t)}{10} + 3\dfrac{\sin(3t)}{10} + \dfrac{e^{4t}}{3}$ est donc une solution particulière de

(E').
$$y' - y = \cos(3t) + e^{4t}$$

d) Résoudre $(E')\ y' - y = \cos(3t) + e^{4t}$

(E') est une équation différentielle *linéaire* du premier ordre, dont $y_1 + y_2 : t \mapsto -\dfrac{\cos(3t)}{10} + 3\dfrac{\sin(3t)}{10} + \dfrac{e^{4t}}{3}$ est une solutions particulière. Les solutions de (E') sont obtenues comme la somme de $y_1 + y_2$ et d'une solution de l'équation différentielle homogène associée à (E'),

$$(E'_H) \qquad y' - y = 0\,.$$

Les solutions de $(E')_H$ sont de la forme $t \mapsto \lambda e^t$, avec λ constante réelle. L'ensemble des solutions de (E') est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ y : t \mapsto -\frac{\cos(3t)}{10} + 3\frac{\sin(3t)}{10} + \frac{e^{4t}}{3} + \lambda e^t\,;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 4. On considère l'équation différentielle $\quad (E) \quad 7y' + 2y = t^2 - 3t + 5.$

a) Résoudre l'équation homogène associée.

L'équation homogène associée à (E) est $\quad (E_H) \quad 7y' + 2y = 0.$ On a

$$7y' + 2y = 0 \iff y' = -\frac{2}{7}y$$

donc l'ensemble des solutions de (E_H) est

$$S_H = \{y : t \mapsto \lambda e^{-2t/7} \,;\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

On considère l'équation différentielle $\quad (E) \quad 7y' + 2y = t^2 - 3t + 5.$

b) Chercher une solution particulière de (E) qui soit une fonction polynomiale de degré 2, puis résoudre (E).

Nous cherchons une solution particulière $y : t \mapsto at^2 + bt + c$, où a, b, c sont des constantes réelles. On a

$$\begin{array}{rcl} \forall t \in \mathbb{R}\,,\ 7y'(t) + 2y(t) & = & 7(2at + b) + 2(at^2 + bt + c) \\ & = & 2at^2 + (14a + 2b)t + (7b + 2c) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} y \text{ est une solution de } (E) & \Longleftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}\,,\ 2at^2 + (14a + 2b)t + (7b + 2c) = t^2 - 3t + 5 \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 2a = 1 \\ 14a + 2b = -3 \\ 7b + 2c = 5 \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = -5 \\ c = 20 \end{array} \right. \end{array}$$

La fonction $y_0 : t \mapsto \dfrac{t^2}{2} - 5t + 20$ est une solution de l'équation différentielle (E). L'ensemble des solutions de(E) est

$$S = \{y_0 + z\,;\, z \in S_H\} = \left\{ y : t \mapsto \frac{t^2}{2} - 5t + 20 + \lambda e^{-2t/7}\,;\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

On considère l'équation différentielle $\quad (E) \quad 7y' + 2y = t^2 - 3t + 5.$
c) Déterminer l'unique solution de (E) prenant la valeur 3 en 7.

Nous avons vu en b) que les solutions de (E) sont de la forme
$y : t \mapsto \dfrac{t^2}{2} - 5t + 20 + \lambda e^{-2t/7}$, où λ est une constante réelle. On a alors

$$\begin{aligned} y(7) = 3 \quad & \iff \quad \frac{49}{2} - 35 + 20 + \lambda e^{-2} = 3 \\ & \iff \quad \lambda e^{-2} = 3 - \frac{19}{2} = -\frac{13}{2} \\ & \iff \quad \lambda = -\frac{13e^2}{2}. \end{aligned}$$

L'unique solution de (E) prenant la valeur 3 en 7 est la fonction
$t \mapsto \dfrac{t^2}{2} - 5t + 20 - \dfrac{13e^2}{2} e^{-2t/7}$.

Exercice 5. La loi de refroidissement de Newton stipule que la vitesse de

refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant. La température (en ^oC) du corps à l'instant t (en minutes) est notée $\theta(t)$. La température du milieu ambiant est noté T_0.
La loi de Newton se traduit mathématiquement ainsi : la fonction θ est solution de l'équation différentielle $y' = -\mu(y - T_0)$, où $\mu > 0$ est une constante qui dépend du corps inerte (c'est le coefficient de proportionnalité, qui est fixé).
a) Résoudre cette équation différentielle.

L'équation différentielle linéaire

$$(E) \qquad y' = -\mu(y - T_0) = -\mu y + \mu T_0$$

a une solution particulière évidente : la fonction constante égale à T_0.
De plus l'équation différentielle homogène associée est

$$(E_H) \qquad y' = -\mu y\,.$$

L'ensemble des solutions de (E_H) est $S_H = \{y : t \mapsto \lambda e^{-\mu t}\,;\, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
L'ensemble de solutions de (E) est donc

$$S = \{T_0 + z\,;\, z \in S_H\} = \{y : t \mapsto T_0 + \lambda e^{-\mu t}\,;\, \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$

b) Dans une pièce dont la température est de $20^o C$, on met une tasse de thé de température $80^o C$. On constate qu'au bout de 2 minutes, la température du thé a baissé à $60^o C$. Déterminer la valeur du coefficient μ. Quelle est la température du thé au bout de 4 minutes?

Notons $\theta(t)$ la température (en $^o C$) du thé au bout du temps t (exprimé en minutes). D'après la loi de refroidissement de Newton, la fonction θ est une solution de l'équation différentielle $y' = -\mu(y - T_0)$, pour un certain paramètre $\mu > 0$. Donc d'après a), il existe une constante réelle λ telle que

$$\forall t \in [0, +\infty[\,,\ \theta(t) = T_0 + \lambda e^{-\mu t}\,.$$

On sait que $T_0 = 20$ et $\theta(0) = 80$, $\theta(2) = 60$. Ces informations vont nous permettre de déterminer μ et λ. En effet,

$$\theta(0) = 80 \iff 20 + \lambda = 80 \iff \lambda = 60\,.$$

Donc $\theta(t) = 20 + 60e^{-\mu t}$.

$$\theta(2) = 60 \iff 20 + 60e^{-2\mu} = 60 \iff e^{-2\mu} = \frac{2}{3} \iff \mu = -\frac{1}{2}\ln(\frac{2}{3})$$

Donc $\theta(t) = 20 + 60\, e^{\frac{t}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$.

La température du thé au bout de 4 minutes est

$$\begin{aligned}\theta(4) &= 20 + 60 e^{2\ln\left(\frac{2}{3}\right)} = 20 + 60 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= 20 + 60 \cdot \frac{4}{9} = 20 + \frac{80}{3} = \frac{140}{3} \simeq 46,7\,.\end{aligned}$$

Exercice 6. Résoudre l'équation différentielle suivante :

a. $ty' + 3y - 2t^5 = 0$ (sur $]0, +\infty[$)

L'équation différentielle est équivalente à

$$(E) \qquad y' = -\frac{3}{t}y + 2t^4 .$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre. L'équation homogène associée est

$$(E_H). \qquad y' = -\frac{3}{t}y$$

i) La fonction $A : t \mapsto -3\ln(t)$ étant une primitive de la fonction $t \mapsto -\dfrac{3}{t}$ sur $]0, +\infty[$, l'ensemble des solutions de (E_H) sur $]0, +\infty[$ est

$$S_H = \{y \mapsto \lambda e^{-3\ln(t)} = \frac{\lambda}{t^3} \,;\, \lambda \in \mathbb{R}\} .$$

ii) On cherche ensuite une solution particulière de $(E)\ y' = -\frac{3}{t} + 2t^4$ sous la forme $y_0(t) = k(t)\frac{1}{t^3}$ (méthode de variation de la constante). On a

$$y_0'(t) + \frac{3}{t}y_0(t) = \left(\frac{k'(t)}{t^3} - 3\frac{k(t)}{t^4}\right) + \frac{3}{t}\cdot\frac{k(t)}{t^3} = \frac{k'(t)}{t^3}\,.$$

Donc y_0 est une solution de (E) si $\forall t \in]0,+\infty[\,,\ \frac{k'(t)}{t^3} = 2t^4$, c'est-à-dire si $\forall t \in]0,+\infty[\,,\ k'(t) = 2t^7$.

Posons $k(t) = \frac{t^8}{4}$; k est une primitive de $t \mapsto 2t^7$, donc la fonction

$$y_0 : t \mapsto \frac{t^8}{4}\cdot\frac{1}{t^3} = \frac{t^5}{4}$$

est une solution particulière de (E).

iii) Conclusion. L'ensemble des solutions de (E) (sur $]0,+\infty[$) est

$$S = \{y_0 + z\,;\ z \in S_H\} = \left\{y : t \mapsto \frac{t^5}{4} + \frac{\lambda}{t^3}\,;\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Résoudre l' équation différentielle suivante :

b. $y' + (\tan t)y = \sin(2t)$ (sur $]-\pi/2, \pi/2[$) .

i) L'équation différentielle est équivalente à

$$(E') \qquad y' = -\tan(t)y + \sin(2t)\,.$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, d'équation homogène associée

$$(E'_H). \qquad y' = -\tan(t)y$$

i) On a $-\tan(t) = -\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)} = \dfrac{\cos'(t)}{\cos(t)}$. Notons que sur l'intervalle $I =]-\pi/2, \pi/2[$, $\cos(t) > 0$. La fonction $A : t \mapsto \ln(\cos(t))$ ést une primitive de la fonction $-\tan$ sur I, donc l'ensemble des solutions de (E'_H) sur $]0, +\infty[$ est

$$S'_H = \{y \mapsto \lambda e^{\ln(\cos(t))} = \lambda \cos(t)\,;\, \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$

ii) On cherche ensuite une solution particulière de $(E')\ y' = -\tan(t)y + \sin(2t)$ sous la forme $y_0(t) = k(t)\cos(t)$. On a

$$y_0'(t) + \tan(t)y_0(t) = k'(t)\cos(t) - k(t)\sin(t) + \frac{\sin(t)}{\cos(t)}k(t)\cos(t) = k'(t)\cos(t)\,.$$

Donc y_0 est une solution de (E') si
$\forall t \in I\,,\ k'(t)\cos(t) = \sin(2t) = 2\cos(t)\sin(t)$, c'est-à-dire si
$\forall t \in I\,,\ k'(t) = 2\sin(t)$.

Posons $k(t) = -2\cos(t)$; k est une primitive de $t \mapsto 2\sin(t)$, donc la fonction

$$y_0 : t \mapsto -2(\cos(t))^2$$

est une solution particulière de (E').

iii) Conclusion. L'ensemble des solutions de (E') (sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$) est

$$S' = \{y_0 + z\,;\, z \in S_H'\} = \{-2(\cos(t))^2 + \lambda\cos(t)\,;\, \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$

Exercice 7. Résoudre le problème de Cauchy *a.* $\begin{cases} y' + y = te^t \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

L'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + y = te^t$ est équivalente à

$$(E) \qquad y' = -y + te^t$$

i) L'équation homogène associée est (E_H) $y' = -y$. L'ensemble des solutions de (E_H) est $S_H = \{t \mapsto \lambda e^{-t}\,;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

ii) Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme $y_0(t) = (at+b)e^t$, où a, b sont des constantes réelles. On a

$y_0'(t) + y_0(t) = [ae^t + (at+b)e^t] + (at+b)e^t = (2at + (a+2b))e^t$.

Donc : y_0 est une solution de (E) $\iff \begin{cases} 2a = 1 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/4 \end{cases}$.

La fonction $y_0 : t \mapsto \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right)e^t$ est une solution particulière de (E).

iii) D'après i) et ii), l'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \{y : t \mapsto \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{t} + \lambda e^{-t}\,;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

iv) Pour quelle valeur de la constante λ la condition $y(0) = 1$ est-elle satisfaite par une solution de (E)? On a

$$y(0) = -\frac{1}{4} + \lambda \quad \text{donc} \quad y(0) = 1 \iff -\frac{1}{4} + \lambda = 1 \iff \lambda = \frac{5}{4}\,.$$

Conclusion. La solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' + y = te^{t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ est $y : t \mapsto \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{t} + \frac{5}{4}e^{-t}$.

Résoudre le problème de Cauchy : *b.* $\begin{cases} y' - 3y = \dfrac{2e^{3t}}{1+t^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$

L'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' - 3y = \dfrac{2e^{3t}}{1+t^2}$ peut s'écrire

$$(E') \qquad y' = 3y + \frac{2e^{3t}}{1+t^2}$$

i) L'équation homogène associée est (E'_H) $y' = 3y$. L'ensemble des solutions de (E'_H) est $S'_H = \{t \mapsto \lambda e^{3t}\,;\, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

ii) On cherche une solution particulière de (E) par la méthode de variation de la constante, en posant $y_0(t) = k(t)e^{3t}$. Alors

$$y_0'(t) - 3y_0(t) = (k'(t)e^{3t} + 3k(t)e^{3t}) - 3k(t)e^{3t} = k'(t)e^{3t}\,.$$

Donc y_0 est une solution de (E) si $\forall t \in \mathbb{R}\,,\ k'(t) = \dfrac{2}{1+t^2}$.

La fonction $2\arctan$ étant une primitive de $t \mapsto \dfrac{2}{1+t^2}$, la fonction $y_0 : t \mapsto 2\arctan(t)e^{3t}$ est une solution particulière de (E).

iii) D'après i) et ii), l'ensemble des solutions de (E') est

$$S = \{y : t \mapsto 2\arctan(t)e^{3t} + \lambda e^{3t} = (2\arctan(t) + \lambda)e^{3t}\,;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

iv) Il reste à trouver la valeur de la constante λ pour que la condition $y(1) = 0$ soit satisfaite. On a

$$y(1) = (2\arctan(1) + \lambda)e^3 = (\frac{\pi}{2} + \lambda)e^3$$

donc

$$y(1) = 0 \iff \frac{\pi}{2} + \lambda = 0 \iff \lambda = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Conclusion. La solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' - 3y = \dfrac{2e^{3t}}{1+t^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$ est $y : t \mapsto \left(2\arctan(t) - \dfrac{\pi}{2}\right)e^{3t}$.

Analyse 1

TD 4
Correction des exercices 8 à 12

Théorème

Soit $P(X) = X^2 + aX + b$ le polynôme caractéristique de l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (H)$$

et soit Δ le discriminant de P.

i) Si $\Delta > 0$, en notant r_1 et r_2 les deux racines distinctes réelles de P, l'ensemble des solutions de (H) est

$$\mathcal{S}_H = \left\{ y : t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}\,;\ \lambda, \mu \text{ constantes réelles} \right\}.$$

ii) Si $\Delta = 0$, en notant $r_0 \in \mathbb{R}$ la racine double de P, l'ensemble des solutions de (H) est

$$\mathcal{S}_H = \left\{ y : t \mapsto (\lambda + \mu t) e^{r_0 t}\,;\ \lambda, \mu \text{ constantes réelles} \right\}.$$

iii) Si $\Delta < 0$, en notant $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ les deux racines complexes conjuguées distinctes de P, l'ensemble des solutions de (H) est

$$\mathcal{S}_H = \left\{ y : t \mapsto (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)) e^{\alpha t}\,;\ \lambda, \mu \text{ constantes réelles} \right\}.$$

Exercice 8 :

Résoudre l'équation différentielle $y'' - y' - y = 0$ (E).

C'est une équation différentielle homogène dont le polynôme caractéristique est $P(X) = X^2 - X - 1$.

Comme $\Delta = 5 > 0$, P admet deux racines réelles distinctes

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Donc l'ensemble des solution de (E) est

$$S_E = \left\{ t \mapsto \lambda e^{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)t} + \mu e^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)t} \mid \lambda,\ \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 9 :

a) Résoudre l'équation différentielle $-2y'' + 6y' - \frac{9}{2}y = 0$.

On a

$$-2y'' + 6y' - \frac{9}{2}y = 0 \iff y'' - 3y' + \frac{9}{4}y = 0 \quad (E).$$

C'est une équation différentielle homogène dont le polynôme caractéristique est $P(X) = X^2 - 3X + \frac{9}{4}$.

Comme $\Delta = 9 - 4 \times \dfrac{9}{4} = 0$, P admet une racine réelle double : $\dfrac{3}{2}$

Donc l'ensemble des solution de (E) est

$$S_E = \left\{ t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{\frac{3}{2}t} \mid \lambda,\ \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 9 :

b) Parmi les solutions trouvées en a), déterminer celle qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

Les solutions sont de la forme

$$y(t) = (\lambda + \mu t)e^{\frac{3}{2}t} \quad \text{avec } \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Comme

$$y'(t) = \mu e^{\frac{3}{2}t} + \frac{3}{2}(\lambda + \mu t)e^{\frac{3}{2}t},$$

alors $y(0) = \lambda$ et $y'(0) = \frac{3}{2}\lambda + \mu$.

Donc

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2 \\ \frac{3}{2}\lambda + \mu = -1 \end{cases} \iff \lambda = 2 \text{ et } \mu = -4.$$

La solution est donc

$$y(t) = (2 - 4t)e^{\frac{3}{2}t}.$$

Exercice 10 :

a) Résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$.

Le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

est $P(X) = X^2 - 2X + 5$.

Comme $\Delta = 4 - 4 \times 5 = -16 < 0$ alors P admet 2 racines complexes conjuguées :

$$\frac{2-4i}{2} = 1 - 2i \quad \text{et} \quad \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i.$$

Donc la solution du problème de Cauchy est de la forme

$$y(t) = (\lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t))e^t \quad \text{avec } \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 10 :

a) Résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$

Comme

$$\begin{aligned} y'(t) &= (-2\lambda \sin(2t) + 2\mu \cos(2t))\, e^t + (\lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)) e^t \\ &= [(\lambda + 2\mu) \cos(2t) + (-2\lambda + \mu) \sin(2t)] e^t. \end{aligned}$$

alors $y(0) = \lambda$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu$.

Donc

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda + 2\mu = 1 \end{cases} \iff \lambda = 1 \text{ et } \mu = 0.$$

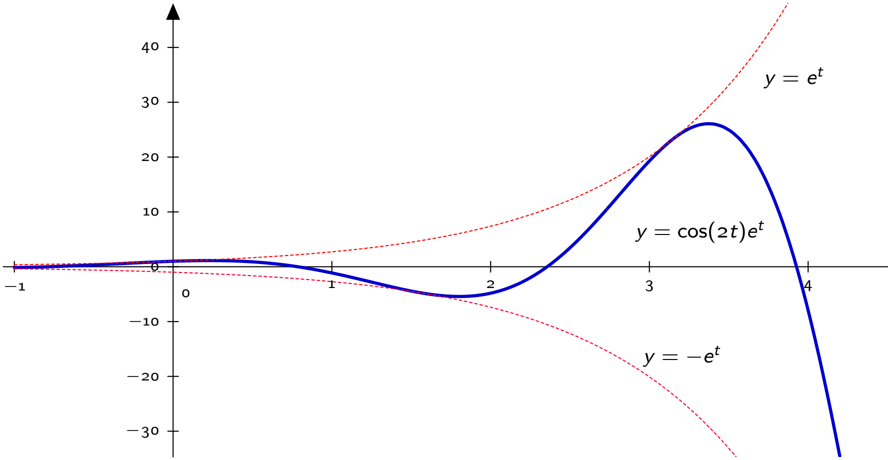
La solution du problème de Cauchy est donc

$$y(t) = \cos(2t) e^t.$$

Exercice 10 :

b) Donner l'allure de la courbe représentative de la solution trouvée en a).

<u>Courbe représentative de la solution :</u>



Exercice 11 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $y'' - 4y' + 4y = \cos t \quad (E)$; b. $y'' + y' + \dfrac{y}{2} = te^{-2t} \quad (E')$.

a. Résolvons l'équation homogène associée

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \qquad (H).$$

Le polynôme caractéristique est $P(X) = X^2 - 4X + 4$. Comme $\Delta = 0$ alors P admet une racine double : 2

L'ensemble des solutions de (H) est

$$S_H = \left\{ t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{2t} \mid \lambda,\ \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 11 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $y'' - 4y' + 4y = \cos t \quad (E)$; b. $y'' + y' + \dfrac{y}{2} = te^{-2t} \quad (E')$.

Cherchons une solution particulière y_0 de la forme

$$y_0(t) = a\cos(t) + b\sin(t) \quad a,\ b \in \mathbb{R}$$

(une solution de cette forme existe d'après le cours).
Comme

$$y_0'(t) = -a\sin(t) + b\cos(t) \quad \text{et} \quad y_0''(t) = -a\cos(t) - b\sin(t) = -y_0(t)$$

alors

$$\begin{aligned} y_0''(t) - 4y_0'(t) + 4y_0(t) =& -4y_0'(t) + 3y_0(t) \\ =& -4(-a\sin(t) + b\cos(t)) + 3(a\cos(t) + b\sin(t)) \\ =&(3a - 4b)\cos(t) + (4a + 3b)\sin(t) \end{aligned}$$

Donc y_0 est solution de (E) si et seulement si

$$(3a - 4b)\cos(t) + (4a + 3b)\sin(t) = \cos(t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}$$

Exercice 11 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $y'' - 4y' + 4y = \cos t \quad (E)$; b. $y'' + y' + \dfrac{y}{2} = te^{-2t} \quad (E')$.

et par identification

$$\iff \begin{cases} 3a - 4b = 1 \\ 4a + 3b = 0 \end{cases} \quad \iff \quad a = \frac{3}{25}, \ b = -\frac{4}{25}.$$

Par conséquent,

$$y_0(t) = \frac{1}{25}(3\cos(t) - 4\sin(t)).$$

Donc l'ensemble des solutions de (E) est

$$\begin{aligned} S_E &= \{t \mapsto y_0(t) + y(t) \mid y \in S_H\} \\ &= \left\{ t \mapsto \frac{1}{25}(3\cos(t) - 4\sin(t)) + (\lambda + \mu t)e^{2t} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Exercice 11 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $y'' - 4y' + 4y = \cos t \quad (E)$; b. $y'' + y' + \dfrac{y}{2} = te^{-2t} \quad (E')$.

b. Résolvons l'équation homogène associée

$$y'' + y' + \frac{1}{2}y = 0 \qquad (H).$$

Le polynôme caractéristique $P(X) = X^2 + X + \frac{1}{2}$ $(\Delta = -1 < 0)$ admet 2 racines complexes conjuguées

$$\frac{-1-i}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1+i}{2}.$$

Donc l'ensemble des solutions de (H) est

$$S_H = \left\{ t \mapsto (\lambda \cos(t/2) + \mu \sin(t/2))e^{-t/2} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 11 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $y'' - 4y' + 4y = \cos t \quad (E)$; b. $y'' + y' + \dfrac{y}{2} = te^{-2t} \quad (E')$.

On cherche une solution particulière y_0 de la forme

$$y_0(t) = (a + bt)e^{-2t} \quad a,\ b \in \mathbb{R}.$$

Comme

$$y_0'(t) = (b - 2a - 2bt)e^{-2t} \quad \text{et} \quad y_0''(t) = (4a - 4b + 4bt)e^{-2t}.$$

alors

$$y_0''(t) + y_0'(t) + \frac{y_0(t)}{2} = \left(\frac{5a}{2} - 3b + \frac{5b}{2}t\right) e^{-2t}.$$

Donc y_0 est solution de (E') si et seulement si

$$\left(\frac{5a}{2} - 3b + \frac{5b}{2}t\right) e^{-2t} = te^{-2t} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 11 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $y'' - 4y' + 4y = \cos t \quad (E)$; b. $y'' + y' + \dfrac{y}{2} = te^{-2t} \quad (E')$.

et par identification

$$\iff \begin{cases} \dfrac{5a}{2} - 3b = 0 \\ \\ \dfrac{5b}{2} = 1 \end{cases} \iff a = \frac{12}{25},\ b = \frac{2}{5}.$$

D'où

$$y_0(t) = \frac{2}{25}(5t+6)e^{-2t}.$$

Donc l'ensemble des solutions de (E') est

$$\begin{aligned} S_E &= \{t \mapsto y_0(t) + y(t) \mid y \in S_H\} \\ &= \left\{ t \mapsto \frac{2}{25}(5t+6)e^{-2t} + (\lambda \cos(t/2) + \mu \sin(t/2))e^{-t/2} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Exercice 12 :

Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} 3y'' - 2y' - y = 3t^2 + 1 \\ y(0) = -2, y'(0) = 1 \end{cases}$.

On résout l'équation homogène associée

$$3y'' - 2y' - y = 0 \iff y'' - \frac{2}{3}y' - \frac{1}{3}y = 0.$$

Le polynôme caractéristique est $P(X) = X^2 - \frac{2}{3}X - \frac{1}{3}$. Comme $\Delta = \frac{16}{9} > 0$ alors P admet 2 racines réelles distinctes

$$\frac{2/3 - 4/3}{2} = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \frac{2/3 + 4/3}{2} = 1.$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$S_H = \left\{ t \mapsto \lambda e^{-\frac{t}{3}} + \mu e^t \mid \lambda,\ \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 12 :

Cherchons une solution particulière de la forme

$$y_0(t) = at^2 + bt + c \quad a,\ b,\ c \in \mathbb{R}.$$

Comme

$$\begin{aligned} 3y_0''(t) - 2y_0'(t) - y_0(t) =& 3(2a) - 2(2at + b) - (at^2 + bt + c) \\ =& -at^2 + (-4a - b)t + 6a - 2b - c \end{aligned}$$

.

alors y_0 est solution de (E) si et seulement si

$$-at^2 + (-4a - b)t + 6a - 2b - c = 3t^2 + 1 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}$$

et par identification

$$\iff \begin{cases} -a = 3 \\ -4a - b = 0 \\ 6a - 2b - c = 1 \end{cases} \iff a = -3,\ b = 12,\ c = -43.$$

Donc

$$y_0(t) = -3t^2 + 12t - 43.$$

Exercice 12 :

Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} 3y'' - 2y' - y = 3t^2 + 1 \\ y(0) = -2, y'(0) = 1 \end{cases}$.

Par conséquent, la solution est de la forme

$$y(t) = -3t^2 + 12t - 43 + \lambda e^{-\frac{t}{3}} + \mu e^t.$$

Déterminons les valeurs de λ et μ :

comme

$$y'(t) = -6t + 12 - \frac{\lambda}{3} e^{-\frac{t}{3}} + \mu e^t$$

alors $y(0) = -43 + \lambda + \mu$ et $y'(0) = 12 - \frac{\lambda}{3} + \mu$

Donc

$$\begin{cases} y(0) = -2 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -43 + \lambda + \mu = -2 \\ 12 - \frac{\lambda}{3} + \mu = 1 \end{cases} \iff \lambda = 39, \ \mu = 2.$$

Par conséquent, la solution est

$$y(t) = -3t^2 + 12t - 43 + 39e^{-\frac{t}{3}} + 2e^t.$$