UAPV - UFR STS — Année 2018/2019

Portails Math-Info/Math-Physique L1 S1 — Analyse 1

Corrigé du CC2

Exercice 1. a) f est la restriction à $]-\infty, 2]$ d'une fonction polynomiale, elle est donc dérivable et

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)\,.$$

Donc

$$f'(x) = 0 \iff x(x-1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1\,.$$

Les points critiques de f sont 0 et 1.

b) Si $x \in]-\infty, 0[\cup]1, 2]$, x et $x-1$ sont de même signe, donc $f'(x) > 0$. Si $x \in]0, 1[$, x et $x-1$ sont de signes opposés, donc $f'(x) < 0$.

De plus $f(0) = 1$, $f(1) = 2 - 3 + 1 = 0$, $f(2) = 16 - 12 + 1 = 5$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}) = -\infty$. On obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	5

c) D'après le tableau de variations de b), la fonction f atteint un maximum local (valant 1) en 0, un minimum local (valant 0) en 1, et son maximum global (valant 5) en 2.

Exercice 2. a) On rappelle que pour $a > 0$, $a^x = e^{x \ln a}$ par définition. On a

$$3^x = 2^{x+2} \iff e^{x\ln 3} = e^{(x+2)\ln 2} \iff x \ln 3 = (x+2)\ln 2 \iff x(\ln 3 - \ln 2) = 2\ln 2\,.$$

L'équation a une solution unique, qui est $\dfrac{2\ln 2}{\ln 3 - \ln 2}$.

b) Remarquons que $3 - 2x$ doit être strictement positif pour que $\ln(3 - 2x)$ soit défini. La fonction ln étant strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on a

$$\ln(3-2x) > 1 \iff \ln(3-2x) > \ln e \iff 3 - 2x > e \iff 2x < 3 - e \iff x < \frac{3-e}{2}\,.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $]-\infty, \dfrac{3-e}{2}[$.

Exercice 3. a) $g(x) = \ln(u(x))$, avec $u(x) = e^x + 1$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives, et ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$g'(x) = \ln'(u(x))u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{e^x}{e^x + 1}\,.$$

g' est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (la fonction au dénominateur ne s'annulant pas) donc g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, par la formule $(v/w)' = (v'w - vw')/w^2$,

$$g''(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

b) La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 pour g s'écrit

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0\,.$$

On a $g(0) = \ln 2$ et d'après a), $g'(0) = \dfrac{1}{2}$ et $g''(0) = \dfrac{1}{4}$. On obtient

$$g(x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0\,.$$

c) D'après b),

$$2g(x) - 2\ln 2 - x = 2(\ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)) - 2\ln 2 - x = \frac{x^2}{4} + 2x^2\varepsilon(x)$$

On trouve ainsi

$$\lim_{x\to 0}\frac{2g(x) - 2\ln 2 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{4} + 2\varepsilon(x) = \frac{1}{4}\,.$$

Exercice 4. a) La fonction $x \mapsto \dfrac{(x-2)^3}{3}$ étant une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto (x-2)^2$,

$$\int_1^4 (x-2)^2\,dx = \Big[\frac{(x-2)^3}{3}\Big]_1^4 = \frac{2^3 - (-1)^3}{3} = \frac{8-(-1)}{3} = 3\,.$$

b) La fonction $x \mapsto \dfrac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} = \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ est une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto x^{-1/3}$. D'où

$$\int_1^8 x^{-1/3} = \Big[\frac{3}{2}x^{2/3}\Big]_1^8 = \frac{3}{2}(8^{2/3} - 1) = \frac{3}{2}(4-1) = \frac{9}{2}\,.$$

c)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{1+(\cos x)^2}\,dx &= \int_0^{\pi/2} -\frac{\cos'(x)}{1+(\cos x)^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} -(\arctan\circ\cos)'(x)\,dx \\
&= \Big[-\arctan(\cos x)\Big]_{x=0}^{x=\pi/2} \\
&= -\arctan(0) + \arctan(1) \\
&= 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Remarque : on peut aussi passer par le changement de variable $\cos x = t$ *dans l'intégrale, qui donne* $-\displaystyle\int_1^0 \frac{dt}{1+t^2}$.