Licence de mathématiques S5 — Algèbre générale 1
Université d'Avignon — Année 2021-22

2-ième feuille d'exercices - Anneaux

Exercice 1 : Soit $(A,+,.)$ un anneau et $a, b \in A$; on pose $ab - ba = \alpha$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a

$$a^n b - b a^n = a^{n-1}\alpha + a^{n-2}\alpha a + \ldots + \alpha a^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}\alpha a^k \,.$$

Exercice 2 : On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux :

$$\mathbb{D} = \{\frac{n}{10^k}\;;\; n \in \mathbb{Z}\,,\; k \in \mathbb{N}\}\,.$$

a) Montrer que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q},+,\times)$.

b) Quelles sont les unités de l'anneau $(\mathbb{D},+,\times)$?

Exercice 3 : On considère le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}\,;\; a, b \in \mathbb{Z}\}\,.$$

a) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R},+,\times)$.

b) Justifier que pour $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, il existe une unique couple d'entiers (a,b) tel que $x = a + b\sqrt{2}$. On définit $N(x)$ par

$$N(x) = a^2 - 2b^2\,.$$

c) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $N(xy) = N(x)N(y)$. En déduire que $a + b\sqrt{2}$ (avec $a, b \in \mathbb{Z}$) est une unité de $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}],+,\times)$ si et seulement si $a^2 - 2b^2 = \pm 1$.

Exercice 4 : Soit $(A,+,\times)$ un anneau.

1. a) Soit $x, y \in A$ tels que $xy = yx$. Montrer que pour tout $n \in \mathcal{N}^*$,

$$y^n - x^n = (y - x)\sum_{k=0}^{n-1}(x^k y^{n-1-k})$$

b) En déduire que pour tout $x \in A$,

$$1 - x^n = (1 - x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

2. On dit qu'un élément x de A est nilpotent s'il existe un entier naturel n non nul tel que $x^n = 0$. On pose $\mathcal{N}(A) = \{x \in A \mid x \text{ nilpotent}\}$.

a) Montrer que si x est nilpotent alors $1 - x$ est inversible pour la loi multiplicative de A.

b) Soit $x, y \in A$ tels que xy est nilpotent. Vérifier que yx est nilpotent.

c) Que dire de $\mathcal{N}(A)$ lorsque A est un anneau intègre ?

3. On suppose de plus que l'anneau $(A,+,\times)$ est commutatif.

a) Montrer que $\mathcal{N}(A)$ est un idéal de A.

b) Montrer que dans l'anneau quotient $A/\mathcal{N}(A)$, l'élément $0 \in A/\mathcal{N}(A)$ est le seul élément nilpotent.

4. Dans cette question $A = \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$. Montrer que $\overline{6} \in \mathcal{N}(A)$ puis que $\mathcal{N}(A) = \{\lambda\overline{6} \mid \lambda \in \mathbb{Z}\}$. Combien $\mathcal{N}(A)$ contient-il d'éléments ?

Exercice 5 : Soit $(A,+,\times)$ un anneau commutatif et I, J deux idéaux de A. On définit le radical de I par :

$$\sqrt{I} = \{x \in A ; \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in I\}.$$

(1) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal contenant I.

(2) Si $A = \mathbb{Z}$, $I = 2\mathbb{Z}, 8\mathbb{Z}, 18\mathbb{Z}$, que vaut $\sqrt{I}$? Plus généralement, si $p_1, \ldots, p_n$ sont des nombres premiers distincts, chercher $\sqrt{(p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n})\mathbb{Z}}$.

(3) Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$. En déduire que dans l'anneau quotient $A/\sqrt{I}$, l'élément $0 \in A/\sqrt{I}$ est le seul élément nilpotent.

(4) Montrer que $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

Exercice 6 : Soit A l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues. On note $+$ et $\times$ les opérations usuelles d'addition et multiplication des fonctions réelles.

(1) Montrer que $(A,+,\times)$ est un anneau commutatif. Est-il intègre ?

(2) Quels sont les éléments inversibles de A ?

(3) Pour tout élément f de A on note $Z(f) \overset{\text{déf.}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ l'ensemble des zéros de f. Montrer que pour tous $f, g \in A$, on a

$$f \text{ divise } g \text{ dans } A \implies Z(f) \subset Z(g)\,.$$

A-t-on l'implication réciproque ?

(4) Soit B un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble :

$$I(B) \overset{\text{déf.}}{=} \{f \in A \mid \forall x \in B,\ f(x) = 0\}$$

est un idéal de A.

(5) On suppose que B est non vide et différent de $\mathbb{R}$. Montrer que $I(B)$ n'est pas principal (on pourra considérer la racine cubique d'un élément).

Exercice 7 : Montrer que tout anneau intègre *fini* $(A,+,\times)$ est un corps.

Indication : montrer d'abord que pour tout $a \in A\backslash\{0\}$, les applications $g_a : x \mapsto ax$ et $d_a : x \mapsto xa$ sont des permutations de A.

Exercice 8 : Dans $(\mathbb{R}[X],+,\times)$, on note I l'idéal engendré par X^2+1.

a) On considère l'application $F : P \mapsto P(i)$, de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{C}$. Justifier que F est un morphisme surjectif d'anneaux.

b) Montrer que $\ker F = I$.

c) En déduire que les anneaux $(\mathbb{R}[X]/I,+,\times)$ et $(\mathbb{C},+,\times)$ sont isomorphes, et que $(\mathbb{R}[X]/I,+,\times)$ est un corps.

Exercice 9 : 1. a) Déterminer le sous-anneau A de $(\mathbb{C},+,\times)$ engendré par i.

b) Quelles sont les unités de l'anneau $(A,+,\times)$?

2. Déterminer le sous-corps de $(\mathbb{C},+,\times)$ engendré par i.