Chapitre 1 : systèmes linéaires

Dans tout le chapitre le symbole $\mathbb{K}$ désigne indifféremment l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1 Généralités

Définition 1. *On appelle système linéaire de m équations à n inconnues toute famille d'équations de la forme*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 & & (L_1) \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 & & (L_2) \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m & & (L_m) \end{array}\right. . \tag{1}$$

Les $a_{ij} \in \mathbb{K}$ sont les coefficients du système. Les $b_i \in \mathbb{K}$ sont les coefficients du second membre. Les $x_j \in \mathbb{K}$ sont les inconnues du système.

On représente ce système à coefficients dans $\mathbb{K}$ par une matrice A de type (m, n) qui par définition est un tableau à m lignes et n colonnes représenté sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Définition 2. *Une solution du système (1) est un n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ qui vérifie chacune des m équations $L_1, ..., L_m$.*

Définition 3. *Si les b_i sont tous nuls le système est dit homogène.*

Définition 4. *Le système est dit compatible (ou possible) s'il admet au moins une solution. Sinon il est dit incompatible (ou impossible).*

Remarque 1. *Tout système homogène est compatible car $(0, ..., 0)$ est solution.*

Définition 5. *Deux systèmes sont dits équivalents s'ils ont même ensemble de solutions.*

2 Opérations élémentaires, systèmes échelonnés

Proposition 1. *Les opérations suivantes, dites élémentaires, transforment un système en un système équivalent :*

1. *permuter des lignes L_i et L_k, noté $L_i \leftrightarrow L_k$,*
2. *multiplier une ligne L_i par $\alpha \neq 0$, noté $L_i \leftarrow \alpha L_i$,*
3. *remplacer une ligne L_i par $L_i + \beta L_j$, $j \neq i$, noté $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$.*

Dans ce qui suit, on donne la définition de pivot, système échelonné, système échelonné réduit. Ces définitions qui suivent s'utilisent dans le cadre des matrices (ou bien dans le cas des systèmes comme ce qui suit).

Définition 6. *Un pivot d'une ligne d'un système est sa première entrée non nulle.*

Définition 7. *(i) Un système est dit échelonné si*

1. *les lignes ne contenant que des zéros sont sous les autres lignes ;*
2. *chaque pivot d'une ligne est à droite du pivot de la ligne précédente ;*
3. *tous les éléments (de la colonne) sous un pivot sont nuls.*

(ii) On dit qu'un système est sous forme échelonné réduit :

1. *le système est sous forme échelonné ;*
2. *tous les pivots valent* 1 *;*
3. *tous les éléments (de la colonne sauf le pivot) au-dessus et en-dessous d'un pivot sont nuls.*

Il y a deux types de systèmes échelonnés :

1. la dernière ligne non identiquement nulle est de la forme
$$\alpha_r x_r + ... + \alpha_n x_n = \beta \qquad (\alpha_r \neq 0),$$
2. la dernière ligne non identiquement nulle est de la forme
$$0 = \beta \qquad (\beta \neq 0).$$

Le système est compatible dans le cas 1, incompatible dans le cas 2.

Exemple : Les systèmes ci-dessous (dont on donne juste la matrice correspondante) sont respectivement échelonnés et échelonnés réduits :

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Méthode de Gauss (ou méthode du pivot)

Objectif : transformer un système en un système équivalent échelonné par des opérations élémentaires.

On procède par étapes. Décrivons l'étape 1, qui se fait elle-même en deux temps.

1. On commence par éventuellement permuter la ligne L_1 avec une ligne L_k telle que $a_{k1} \neq 0$ (pivotage). On obtient un système équivalent de la forme
$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a'_{11}x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & \cdots & + & a'_{1n}x_n & = & b'_1 \qquad (L'_1) \\ a'_{21}x_1 & + & a'_{22}x_2 & + & \cdots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \qquad (L'_2) \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a'_{m1}x_1 & + & a'_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{mn}x_n & = & b'_m \qquad (L'_m) \end{array} \right. \tag{2}$$
avec $a'_{11} \neq 0$. Ce a'_{11} sera le premier pivot.
2. Ensuite, on remplace chaque ligne L_p, $p \geq 2$, par $L_p - \dfrac{a'_{p1}}{a'_{11}} L_1$ (élimination). Cela conduit à un système équivalent de la forme
$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a^{(1)}_{11}x_1 & + & a^{(1)}_{12}x_2 & + & \cdots & + & a^{(1)}_{1n}x_n & = & b^{(1)}_1 \qquad (L^{(1)}_1) \\ & & a^{(1)}_{22}x_2 & + & \cdots & + & a^{(1)}_{2n}x_n & = & b^{(1)}_2 \qquad (L^{(1)}_2) \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ & & a^{(1)}_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a^{(1)}_{mn}x_n & = & b^{(1)}_m \qquad (L^{(1)}_m) \end{array} \right. . \tag{3}$$

L'étape 2 consiste à appliquer la procédure ci-dessus aux lignes $L_2^{(1)}, ..., L_m^{(1)}$. On continue ainsi de suite jusqu'à obtenir un système échelonné.

Si on se trouve dans le cas 1 (système compatible), on exprime $x_1, ..., x_r$ en fonction des autres x_j, en remontant de la dernière à la première ligne.

Remarque 2. *Pour économiser des calculs, on a aussi parfois intérêt à permuter des colonnes. La permutation des colonnes j et p est notée $C_j \leftrightarrow C_p$.*

4 Rang d'un système, dimension de l'ensemble des solutions

Définition 8. *Si l'ensemble des solutions d'un système linéaire compatible est tel que r inconnues sont déterminées de manière unique à partir de la connaissance des $n-r$ autres choisies arbitrairement, on dit que r est le rang du système et $n-r$ est la dimension de l'ensemble des solutions.*

Proposition 2. *Soit (S) un système linéaire compatible et (S') le système homogène associé. Alors le rang de (S) est égal au rang de (S'). De plus, si $(x_1^0, ..., x_n^0)$ est une solution particulière de (S), alors $(x_1, ..., x_n)$ est solution de (S) si et seulement si $(x_1 - x_1^0, ..., x_n - x_n^0)$ est solution de (S').*

Ceci provient du caractère linéaire du système considéré. En notation matricielle (voir chapitre suivant), l'équation non homogène s'écrit

$$Ax = b$$

et l'équation homogène s'écrit :

$$Ax = 0.$$

Ci-dessus, A est la matrice du système (un tableau de taille (m, n) avec mn entrées, avec dans la ligne i et la colonne j le coefficient $a_{i,j}$) ; x est le vecteur d'inconnues (il y en a n) et b le vecteur du second membre

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots x_n \end{pmatrix} \ ; \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots b_n \end{pmatrix}$$

Disposant d'une solution particulière du système signifie que l'on connait un vecteur x_0 tel que $Ax_0 = b$. Toute autre solution x du système vérifie donc $Ax = b$; par soustraction, il vient donc $Ax - Ax_0 = 0$ c.a.d. $A(x - x_0) = 0$, donc $x - x_0$ est solution du système homogène.

5 Exemples

On détaille trois exemples très simples résolus avec la méthode du pivot de Gauss.

- Exemple 1 :

$$\left\{ \begin{array}{llll} x & +2y & -z & = 5 \\ & y & -z & = 0 \\ & -2y & +3z & = -5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{llll} x & +2y & -z & = 5 \\ & y & -z & = 0 \\ & & z & = -5 \end{array} \right.$$

$$\mathcal{S} = \{(10, -5, -5)\} \quad \text{et rang} =?$$

- Exemple 2 :

$$\left\{ \begin{array}{llll} 2x & +3y & -4z & = 7 \\ 4x & +6y & -8z & = -1 \end{array} \right.$$

$$\left\{\begin{array}{llll} 2x & +3y & -4z & =7 \\ 2x & +3y & -4z & =-1/2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llll} 2x & +3y & -4z & =7 \\ & & & 0=-1/2-7 \end{array}\right.$$

$$\mathcal{S}=\emptyset$$

- Exemple 3 :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & +y & -z & +t & =1 \\ x & +2y & +3z & +4t & =0 \\ x & +2y & -3z & +t & =0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & +y & -z & +t & =1 \\ & y & +4z & +3t & =-1 \\ & y & -2z & & =1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & +y & -z & +t & =1 \\ & y & +4z & +3t & =-1 \\ & & -6z & -3t & =2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & +y & -z & +t & =1 \\ & y & +4z & +3t & =-1 \\ & & z & +\frac{t}{2} & =-\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{2}, \frac{1}{3}-t, -\frac{1}{3}-\frac{t}{2}, t\right)\ ;\ t\in\mathbb{R}\right\} \quad \text{et rang} =?$$