Algèbre 2 (2023) – TD1 continuation

Exo. 6 On a

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = 0 \\ a^2 x + y + az = 0 \\ ax + a^2 y + z = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - aL_1]{L_2 \leftarrow L_2 - a^2 L_1} \begin{cases} x + ay + a^2 z = 0 \\ (1-a^3)y + (a-a^4)z = 0 \\ (1-a^3)z = 0 \end{cases}$$

1er cas : $1 - a^3 = 0$ Alors $a^3 = 1 \Leftrightarrow a = 1$. Le système devient

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0 \\ 0 \cdot z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow S = \{(-y-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

2ème cas : $1 - a^3 \neq 0$ Alors $a^3 \neq 1 \Leftrightarrow a \neq 1$. On a

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = 0 \\ (1-a^3)y + (a-a^4)z = 0 \\ (1-a^3)z = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{L_3}{1-a^3}} \begin{cases} x + ay + a^2 z = 0 \\ (1-a^3)y + (a-a^4)z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc $(1-a^3)y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Dans ce cas,

$$S = \{(0,0,0)\}.$$

Exo. 7 On a

$$\begin{cases} x - y + 2z = a \\ mx + (1-m)y + 2(m-1)z = b \\ 2x + my - (3m+1)z = c \end{cases} \xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - mL_1} \begin{cases} x - y + 2z = a \\ y - 2z = b - ma \\ (m+2)y + (-3m-5)z = c - 2a \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - (m+2)L_2} \begin{cases} x - y + 2z = a \\ y - 2z = b - ma \\ [-3m - 5 + 2(m+2)]z = c - 2a - (m+2)(b - ma) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = a \\ y - 2z = b - ma \\ (-m-1)z = c - 2a - (m+2)(b - ma). \end{cases}$$

On a deux cas principaux à considérer :

<u>1er cas : $m \neq -1$</u> Alors $-m-1 \neq 0$. On peut donc isoler z dans L_3, remplacer dans L_2, isoler y et, similairement, isoler x. On trouve (devoir)

$$\begin{cases} x = (1-m)a + b \\ y = \dfrac{a(-3m^2 - 5m + 4) + b(3m+5) - 2c}{m+1} \\ z = \dfrac{-c + 2a + (m+2)(b - ma)}{m+1} \end{cases},$$

donc

$$S = \left\{ \left((1-m)a + b, \ \frac{a(-3m^2 - 5m + 4) + b(3m+5) - 2c}{m+1}, \ \frac{2a - c + (m+2)(b - ma)}{m+1} \right) \right\}$$

$\underline{2\text{ème cas : } m=-1}$ Alors le système devient

$$\begin{cases} x - y + 2z = a & (L_1) \\ y - 2z = b + a & (L_2) \\ 0 = c - 2a - (b+a) & (L_3) \end{cases}$$

Si on regarde L_3

$$c - 3a - b = 0, \qquad (\star)$$

on trouve que $(\star)$ est une condition sur a, b et c pour que le système soit compatible. Autrement dit,

- si $c-3a-b \neq 0$, alors $S = \emptyset$.
- si $c-3a-b=0$, alors le système est

$$\begin{cases} x - y + 2z = a \\ y - 2z = b + a \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2a + b \\ y = 2z + b + a \end{cases},$$

d'où

$$S = \{(2a+b, 2z+b+a, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Exo. 8 On a

$$\begin{cases} (2-a)x + y - z = 1 \\ x - (2-a)y - 3z = -2 \\ -x + 3y + (2-a)z = 2 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_3}{\overset{L_1 \leftarrow L_2}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} x - (2-a)y - 3z = -2 \\ -x + 3y + (2-a)z = 2 \\ (2-a)x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - (2-a)L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} x - (2-a)y - 3z = -2 \\ (3-2+a)y + (2-a-3)z = 0 \\ (1+(2-a)^2)y + (-1+3(2-a))z = 1+2(2-a) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - (2-a)y - 3z = -2 \\ (1+a)y - (1+a)z = 0 \\ (1+(2-a)^2)y + (5-3a)z = 0. \end{cases}$$

We want to simplify L_2 so we distinguish two cases:

<u>1er cas : $a \neq -1$</u> Alors on peut faire $L_2 \leftarrow \frac{L_2}{1+a}$ et

obtenir

$$\begin{cases} x - (2-a)y - 3z = -2 \\ y - z = 0 \quad \Leftrightarrow y = z \\ (1+(2-a)^2)y + (5-3a)z = 0 \end{cases}$$

$$\overset{y=z \text{ dans } L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x - (2-a)y - 3z = -2 \\ y - z = 0 \\ (1+(2-a)^2)z + (5-3a)z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - (2-a)y - 3z = -2 \\ y - z = 0 \\ (10-5a+a^2)z = 0. \end{cases}$$

5 / On note que $10-5a+a^2$ n'a pas de zéro réel. En effet,

$$\Delta = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 10 = 25-40 = -15 < 0.$$

On peut donc faire $L_3 \leftarrow \frac{L_3}{10-5a+a^2}$ et obtenir

$$\begin{cases} x-(2-a)y-3z = -2 \\ y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Puisqu'on a trois pivots non-nuls, ce système est de Cramer. La solution est

$$S = \{(-2,0,0)\}.$$

$\boxed{2\text{ème cas : } a=-1}$ Alors on a $L_2 : 0=0$, donc le système devient

$$\begin{cases} x-(2-(-1))y-3z = 0 \\ 0 = 0 \\ 16z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-3y-3z = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Le système n'est donc pas de Cramer (pas de solution unique). Les solutions sont

$$S = \{(3y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}.$$