Université d'Avignon — 2020-2021

Algèbre 2 — Licence 1 Mathématiques-Informatique

CC2 : 10 mai 2021 : 10h-11h30 (1h ; 1h20 pour les tiers temps)

On attachera le plus grand soin à la présentation et aux calculs. Aucun document ni appareil numérique autorisé. Le barême est indicatif. Les questions avec * sont plus difficiles (questions bonus).
Le sujet est recto-verso.

Exercice 1. *(5 points). Répondre uniquement par vrai ou faux aux cinq assertions suivantes (on ne demande pas de justifier).*

1. Si $A \in M_3(\mathbb{R})$ vérifie $A^2 = 0$, alors la transposée de A vérifie $A^\top = 0$.

2. Si un système linéaire homogène a plus d'inconnues que d'équations, alors il possède une infinité de solutions.

3. Soit a, b deux paramètres réels et soit le système linéaire dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ x + by = 0\,. \end{cases}$$

Alors, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que ce système n'ait pas de solution.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension 2 et 3 respectivement et en somme directe, alors $n \geq 5$.

5. La matrice A ci-dessous est inversible

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Faux : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = 0$ et A comme $A^\top$ n'est pas nulle.

2. Vrai : on écrit $AX = 0$ le système linéaire homogène avec $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $m < n$. Par le théorème du rang, on a $n = rg(A) + dim(Ker(f))$ où f est l'endomorphisme défini par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a $rg(A) \leq m$. Il vient $dim(Ker(f)) = n - rg(A) \geq n - m > 0$ d'où le résultat.

3. Vrai : prendre $a = b = 1$.

4. Vrai : Par la formule de Grassmann $5 = 2 + 3 - 0 = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G) = dim(F + G) \leq n$. Par contre, c'est faux si la somme n'est pas directe : prendre $n = 3$ et F un hyperplan et $G = \mathbb{R}^3$ l'espace tout entier.

5. Faux : la 3ème ligne = 2 fois la première, donc le déterminant est nul.

Exercice 2. *(4 points). Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le déterminant de A.

2) Pour chaque valeur de $a \in \mathbb{R}$, donner le rang de A (justifier).

On trouve $det(A) = 4a - 8$. Si $a \neq 2$, la matrice est inversible et son rang est 3. Si $a = 2$, alors son rang vaut 1 ou 2 (car A n'est pas nulle et non inversible). De plus, les deux premières lignes pour $a = 2$ sont deux vecteurs non colinéaires, donc son rang vaut 2.

Exercice 3. *(8 points) Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $F = Vect(u_1, u_2)$ et $G = Vect(u_3, u_4, u_5)$ où :*

$$u_1 = (1, -1, 0, 2)\ ;\ u_2 = (0, -9, -9, 6)\ ;\ u_3 = (1, 2, 3, 0)\ ;\ u_4 = (0, -1, 2, -2)\ ;\ u_5 = (3, 7, 7, 2).$$

1) Trouver une relation de liaison entre u_1, u_2, et u_3. Quelle inégalité déduit-on sur $dim(F \cap G)$?

2) Trouver une relation de liaison entre u_3, u_4, et u_5 puis déterminer $dim(G)$ (justifier).

3) Montrer que $u_1 \notin Vect(u_2, u_4)$. Que peut-on en déduire sur la famille $\{u_1, u_2, u_4\}$?

4) A l'aide de ce qui précède, déterminer $dim(F + G)$. Donner une base de $F + G$.*

1) On trouve facilement $u_2 = 3u_1 - 3u_3$. On déduit que $u_3 \in F \cap G$ et que donc $dim(F \cap G) \geq 1$.
2) On trouve facilement $u_5 = 3u_3 - u_4$. Or u_3 et u_4 ne sont pas colinéaires, donc $dim(G) = 2$.
3) La première composante de u_2 et u_4 est nulle;, donc u_1 ne peut pas être une combinaison linéaire de ces deux vecteurs. Par conséquent, comme u_2 et u_4 ne sont pas colinéaires, la famille en question est libre.
4) Formule de Grassman : $dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$. Or $dim(F) = 2$ car u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires. On a vu que $dim(G) = 2$. Enfin, $F \cap G$ est de dimension au moins 1 (et inférieure ou égale à 2). Mais, comme $u_4 \notin F$ par la question 3, l'intersection $F \cap G$ est de dimension 1. En conclusion, $dim(F + G) = 3$.

Pour une base de $F + G$, on prend déjà une base de G, $\{u_4, u_5\}$. Puis on complète par $u_2 \in F$. On montre facilement que est libre $\{u_2, u_4, u_5\}$. Cette famille est aussi dans $F + G$, donc c'est une base de $F + G$ (de dimension 3). D'où le résultat.

TSVP

Exercice 4. *(8 points) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer une base de $Ker(f)$ puis en déduire $dim(Ker(f))$ et $rg(f)$ (le rang de f).

2) a) Calculer A^2 et A^3.

b) En déduire que f^2 est non nul et $f^3 = 0$ (ici $f^2 = f \circ f$ et $f^3 = f \circ f \circ f$).

3) On admet qu'il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille $\{f^2(x), f(x), x\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de f dans cette base.

4) Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille $\{f^2(x), f(x), x\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ (indication : après avoir trouvé un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ judicieux, montrer que la famille est libre en appliquant f à une relation de liaison).*

1) On résout le système linéaire $AX = 0$ où $X = (x, y, z)^\top$ ce qui donne $x = z/2$ et $y = -3z/2$ où $z \in \mathbb{R}$. Ainsi, $Ker(f) = \mathbb{R}u$ où $u = (1/2, -3/2, 1)$. Une base de $Ker(f)$ est donc $\{u\}$. Le noyau de f est de dimension 1 et $rg(f) = 2$ par le théorème du rang.
2) a) Par le calcul :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & -4 & -6 \end{pmatrix}\ ;\ A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) La matrice de f^2 dans la base canonique est $A^2 \neq 0$ donc $f^2 \neq 0$. De plus $A^3 = 0$, donc $f^3 = 0$.
3) La matrice de f dans la base $\{f^2(x), f(x), x\}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Comme $f^2 \neq 0$, il existe $x \neq 0$ t.q. $f^2(x) \neq 0$. Ecrivons une relation de liaison

$$af^2(x) + bf(x) + cx = 0.$$

Alors, en appliquant f^2, il vient $cf^2(x) = 0$ car $f^3 = f^4 = 0$. D'où comme $f^2(x) \neq 0$, $c = 0$. On ré-applique f une fois ce qui donne $af^3(x) + bf^2(x) = 0$ et donc $b = 0$. Finalement, on déduit $a = 0$. Il s'agit d'une famille libre de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.